This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

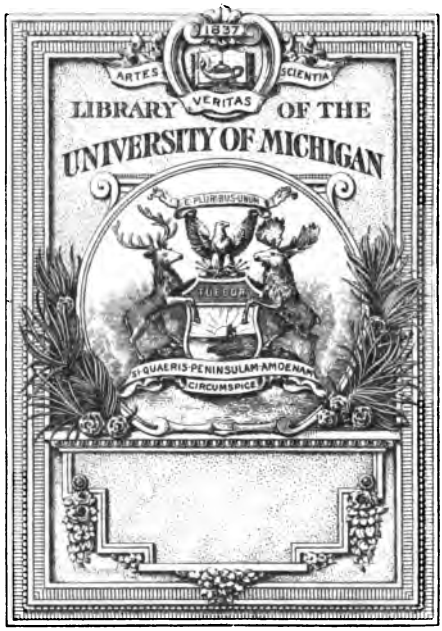
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

MATHEMATICS
A
37
H762

Methodisches Lehrbuch

der

Elementar-Mathematik

von

Dr. Gustav Holzmüller,

Direktor der Gewerbeschule (Realschule mit Fachklassen) zu Hagen i. W.,
Mitglied der Kais. Leop. Carol. Akademie der Naturforscher.

Dritter Teil,

Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl
für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen,
nebst Vorbereitungen auf die Hochschul-Mathematik.

Mit 160 Figuren im Text.

Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1895.

Alle Rechte,
einschließlich des Übersetzungsrechts, vorbehalten.

Vorwort.

Mit dem vorliegenden dritten Teile findet das methodische Lehrbuch des Verfassers seinen Abschluß.

Es handelt sich um einen Ergänzungsband, der ohne jede Systematik eine freie Auswahl methodisch bearbeiteter Gegenstände aus den verschiedenen Gebieten bringt, die auf der Prima der Realgymnasien, Ober-Realschulen und höheren Fachschulen zur Sprache kommen können. Außerdem ermöglicht er dem angehenden Studierenden der Universität und der technischen Hochschule Vorbereitungsstudien für einige Zweige der höheren Mathematik, mit denen er vertraut werden soll. Die zahlreichen praktischen Übungsbeispiele, besonders auch die in der algebraischen Analysis gegebenen, die sich auf Kompressions- und Expansionsarbeit unter Zugrundelegung des Mariotteschen und auch des adiabatischen Gesetzes beziehen, werden das Buch auch für manchen Techniker und Ingenieur brauchbar machen.

Daß es bei den verschiedenen Zielen, die es sich steckt, für den Unterricht in der Prima einer vereinzelten Lehranstalt zu viel bietet, ist selbstverständlich. Da es aber den Anschein hat, als ob der mathematische Unterricht in der Prima der Ober-Realschulen noch nicht ein für alle mal geregelt, sondern noch immer ein streitiges Gebiet sei, so wird das Buch bei den vorauszusehenden Schwankungen gerade im vorliegenden Umfange manchem Fachgenossen nicht unwillkommen sein.

Übungsbeispiele sind bei den Gebieten nicht gegeben worden, für die brauchbare Sammlungen vorhanden sind. Wo es hingegen daran noch fehlt, besonders bezüglich der praktischen Anwendungen, habe ich zahlreiche Beispiele oder Andeutungen eingeflochten. Das nun fast 21jährige Direktorat einer Fachschul-Abteilung hat mir in dieser Hinsicht einige Gelegenheit gegeben, Erfahrungen zu sammeln.

53074

Über den behandelten Stoff sagt das Inhaltsverzeichnis das Nähere. Über die Auswahl, den Umfang und die methodische Behandlungsweise des Lehrstoffs habe ich mich wiederum in einem besonderen Begleitworte, welches den Amtsgenossen von der Verlagsbuchhandlung bereitwillig überlassen wird, ausführlicher ausgesprochen, denn Erörterungen solcher Art sind weniger für die Schüler geeignet.

Lehrbücher pflegen die Entdecker der einzelnen Sätze nicht zu erwähnen, so weit sie Gemeingut der Schule geworden sind. Dasselbe gilt von den angewandten Methoden. Auch muß man gewärtigen, daß, wenn man einen Methodiker als den ersten nennt, von anderer Seite Prioritätsansprüche erhoben werden, zu deren Erörterung Schulbücher der am wenigsten geeignete Schauplatz sind. Ich habe die gesamte neuere Lehrbuch-Litteratur, die mathematischen Zeitschriften, einige Programme, besonders aber die Originalwerke zu Rate gezogen. Einige Quellen sind im Begleitworte genannt. Zahlreiche Entwickelungen aber haben sich in der eigenen Unterrichtsthätigkeit des Verfassers ausgestaltet, und so hoffe ich, daß der Kenner in methodischer Hinsicht einiges Neue finden wird.

Auch für diesen Teil hat mein Kollege, Herr Oberlehrer und Ingenieur Kurt Zimmermann, die Ausführung fast sämmtlicher von mir nur skizzierten Figuren übernommen und so den rechtzeitigen Abschluß des Ganzen ermöglicht. Ihm und auch der Verlagsbuchhandlung sei für das stets bereitwillige Entgegenkommen der verbindlichste Dank ausgesprochen.

Bei der auf mir ruhenden amtlichen Arbeitslast gehörte allerdings einige Energie dazu, das Ganze schnell zum Abschluß zu bringen. Es fehlte aber auch nicht an Ermunterung und Ermutigung von den verschiedensten Seiten her. Zahlreiche und wohlwollende Besprechungen des ersten Teils sind hier in erster Linie zu nennen. Ihnen vor allem ist es zuzuschreiben, daß jener Teil schon jetzt, kaum ein Jahr nach seinem Erscheinen, in neuer Auflage gedruckt werden muß. Aber auch vielfache schriftliche Zustimmungsäußerungen zu der vorgeschlagenen Methode sind aus dem In- und Auslande an mich gelangt.

Möge denn auch dieser dritte Teil eine wohlwollende und freundliche Aufnahme finden; möge aber das ganze Werk Einiges dazu beitragen, daß der mathematische Unterricht an den höheren

Schulen nicht nur den Reformforderungen entspreche, sondern überhaupt zu einer Höhe emporgehoben werde, die dem jetzigen Standpunkte der Pädagogik und der im Sturmschritt vorangeeilten Wissenschaft entspricht.

Auch hier gilt es, einem hohen Ideale entgegenzustreben. Ist es auch dem Einzelnen unmöglich, das Ziel selbst zu erreichen, so gelingt es ihm vielleicht doch, sich ihm um einige wenige Schritte zu nähern. Ob letzteres mit dem vorliegenden Unterrichtswerke gelungen ist, darüber hat nicht der Verfasser, sondern eine höhere Instanz zu entscheiden: die der pädagogischen Wissenschaft und der praktischen Unterrichtskunst.

Hagen i./W., den 1. Februar 1895.

Dr. G. Holzmüller.

Inhalts-Verzeichnis.

Erste Abteilung.

Geometrie.

		Seite
I.	Konstruktion der Kegelschnitte mit alleiniger Hülfe des Lineals . .	1
II.	Folgerungen für Centralperspektive, Schließungsprobleme u. dergl.	6
III.	Projektivische Punktreihen	17
IV.	Projektivische Strahlenbüschel	21
V.	Das Doppelverhältnis	24
VI.	Einige Beispiele projektivischer Strahlenbüschel und Punktreihen. .	28
VII.	Übungen aus der analytischen Geometrie	32
	a) Berechnung der wichtigeren Linien an der Ellipse	32
	b) Krümmungsradius der Ellipse	38
	c) Krümmungsradius der Parabel und Hyperbel	41
	d) Andeutungen über die allgemeine Form der Gleichung zweiten Grades	43
	e) Der Ellipsenzirkel oder das Ovalwerk des Leonardo da Vinci .	45
	f) Flächenberechnungen an Kegelschnitten	46

Zweite Abteilung.

Stereometrie.

I.	Vorbemerkungen über Trägheitsmomente.	51
II.	Sätze über abgeschrägte Prismen und Cylinder und über Drehungskörper	56
III.	Die Kegelschnittsflächen und die zugehörigen Körper.	62
	a) Cylinder	62
	b) Kegel	62
	c) Das Ellipsoid.	63
	d) Kreis-Paraboloid und elliptisches Paraboloid	66
	e) Das Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid	67
IV.	Einige Anwendungen des Satzes von Cavalieri	72
V.	Einige Gewölbeformen	75
VI.	Die grundlegenden Aufgaben der orthographischen Axonometrie . .	80
VII.	Die Kugel in centralperspektivischer Projektion	85

Dritte Abteilung.

Sphärische Trigonometrie.

Seite

I. Vorbemerkungen 88
II. Rechtwinklige sphärische Dreiecke 89
III. Allgemeine sphärische Dreiecke 95
IV. Übungsaufgaben für die vorläufige Berechnungsmethode 98
V. Konstruktion, Kongruenz und Möglichkeit sphärischer Dreiecke bei drei gegebenen Stücken 100
VI. Folgerungen des Cosinus-Satzes 106
VII. Vereinfachte Berechnungsmethoden 113
VIII. Bemerkungen und Andeutungen über die sphärische Reciprocität. 114
IX. Zusammenstellung der wesentlichen Formeln 117

Vierte Abteilung.

Algebraische Analysis mit Anwendungen auf Geometrie und Mechanik.

I. Die ganzen rationalen Funktionen 119
a) Begriff, Übereinstimmung rationaler Funktionen, Bestimmung der Koeffizienten aus den Werten der Funktion 119
b) Parabeln höherer Ordnung und ihre Quadratur 124
c) Die Simpson-Newtonsche Regel nebst Verallgemeinerung. . . 125
d) Anwendungen:
α) Statisches Moment, Schwerpunkt, Trägheitsmoment, Trägheitsmittelpunkt. 128
β) Eine kosmische Aufgabe 129
e) Andeutungen über ganze rationale Funktionen 131

II. Die Funktion $y = \frac{1}{x}$ und die Quadratur der Hyperbel 134
a) Anwendungen auf Logarithmenberechnung 138
b) Anwendungen auf Expansions- und Kompressionsarbeit . . . 139

III. Allgemeines über die unendlichen Reihen 142
a) Rückblick auf die bereits bekannten Reihen. 142
b) Einiges über Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen mit lauter positiven Gliedern 145
c) Einiges über Reihen, die auch negative Glieder enthalten . . 149

IV. Die Newtonsche Reihe und der binomische Lehrsatz für gebrochene und negative Exponenten 154
a) Die Newtonsche Reihe und ihre Konvergenz 154
b) Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatzes 156
c) Binomische Entwickelung irrationaler Ausdrücke 158
d) Ableitung von Reihen für π, arc sin y und arc cos y auf geometrischem Wege 160

V. Anwendung auf algebraische Funktionen 162
a) Quadratur der Kurven $y = x^p$ für beliebiges rationales p . 162
b) Anwendung auf die Reihe $\frac{1}{n^{p+1}} \sum n^p$ bei gebrochenem p . 166

Seite
c) Anwendung auf die Gravitation 167
d) Anwendung auf adiabatische Expansions- und Kompressionsdiagramme 169
e) Beispiele 170
VI. Reihenentwickelungen für einige transcendente Funktionen. . . . 174
a) Logarithmus. 174
b) Reihen für π und cyklometrische Funktionen 176
c) Quadratur und Tangentenproblem für die behandelten transcendenten Funktionen 179
d) Nachträge über die Berechnung der Zahl π 181
VII. Zusammenstellung der wichtigsten Resultate 184

Fünfte Abteilung.

Von den Gleichungen höheren Grades.

I. Gleichungen dritten Grades. 187
II. Gleichungen vierten Grades. 196
III. Andeutungen über Gleichungen n^{ten} Grades 201

Anhang.

I. Involutorische Punktreihen 205
a) Hyperbolische Punktreihen 205
b) Elliptische Punktreihen. 207
c) Aufgaben 208
d) Beziehungen zwischen drei involutorischen Punktpaaren. . . . 210
e) Satz von Désargues 213
f) Kegelschnittskonstruktionen 215
g) Pascalsatz 216
II. Involutorische Strahlenbüschel 217
a) Hyperbolisches und elliptisches Büschel. 217
b) Beziehungen zwischen drei involutorischen Strahlenpaaren . . 219
c) Sätze und Konstruktionen 220
III. Nachtrag zum Pascalsatz 222
IV. Rektifikation der Parabel. 224

Berichtigung.

Auf Seite 39, Zeile 8 und Zeile 11 muß stehen „Radius" statt „Krümmungsradius".

Erste Abteilung.
Geometrie.

I. Konstruktion der Kegelschnitte mit alleiniger Hülfe des Lineals.

1) Pascalscher Satz.

In Teil II ist auf zweifache Art bewiesen worden, daß der Pascalsche Satz zunächst vom Kreise gilt. Sodann ist er durch senkrechte und und schräge Parallelprojektion und ebenso durch Centralprojektion auf die Kegelschnitte übertragen worden. Er lautet für die letzteren:

Bei jedem Kegelschnitte schneiden sich die Gegenseiten des Sehnensechsecks in drei Punkten, die auf einer geraden Linie liegen.

Der Satz gilt von gewöhnlichen und überschlagenen Sechsecken. Er gilt ebenso vom einbeschriebenen Fünfeck und der Tangente in einer seiner Ecken, vom einbeschriebenen Viereck und den Tangenten in zwei Ecken, vom einbeschriebenen Dreieck und den Tangenten in den drei Ecken. Er gilt nicht nur für Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel, sondern auch von zwei parallelen oder zwei sich schneidenden Geraden (die der Ellipse bezw. Hyperbel entsprechen).

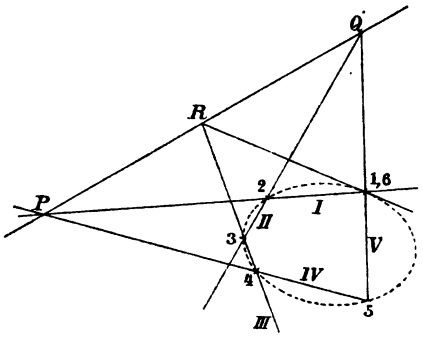
Es ist zweckmäßig die Figuren 40, 41, 42 und 43 von Teil II für jede Art von Kegelschnitten zu zeichnen und die entsprechenden Sätze auszusprechen.

Nach diesen Bemerkungen lassen sich verschiedene Konstruktions-Aufgaben mit dem Lineal allein lösen.

2) **Aufgabe.** Diejenigen Tangenten des durch fünf gegebene Punkte gehenden Kegelschnitts zu konstruieren, die ihn in diesen Punkten berühren.

Auflösung. Sind 1, 2, 3, 4, 5 die gegebenen Punkte, so bilde man P als Schnitt von $\overline{1,2}$ und $\overline{4,5}$, Q als Schnitt von $\overline{2,3}$ und $\overline{5,1}$, R als Schnitt von $\overline{3,4}$ und PQ. Die Gerade von R nach 1 ist die Tangente im letzteren Punkte. In derselben Weise sind die übrigen Tangenten zu konstruieren. — Der Beweis beruht darauf, daß 1 als Doppelpunkt 1, 6 betrachtet wird.

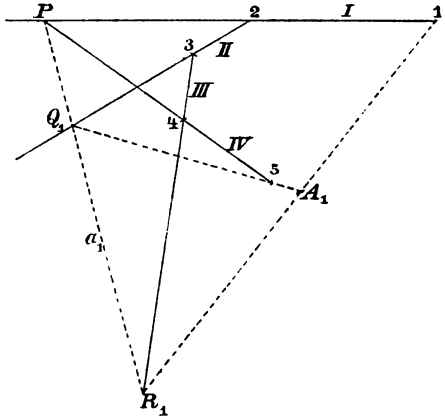
Fig. 1.



3) **Aufgabe.** Den durch fünf gegebene Punkte gehenden Kegelschnitt zu konstruieren.

Auflösung. Sind 1, 2, 3, 4, 5 die gegebenen Punkte, so ziehe man die Geraden $\overline{1,2}$ oder I, $\overline{2,3}$ oder II, $\overline{3,4}$ oder III, $\overline{4,5}$ oder IV und bilde den Durchschnitt P von I und IV. Durch P lege man eine beliebige Pascalsche Gerade a_1, die von II und III in den Punkten Q_1 und R_1 getroffen wird. Man ziehe jetzt die Geraden $\overline{Q_1\,5}$ und $\overline{R_1\,1}$. Der Durchschnittspunkt A_1 dieser Geraden ist der zur Pascalschen Geraden a_1 gehörige sechste Punkt des Kegelschnitts. Zieht man beliebig viele Strahlen durch P, so kann man beliebig viele Punkte A konstruieren. Zu jeder Pascalschen Geraden gehört ein bestimmter Punkt A. Zwischen dem Strahlenbüschel durch P und den zugehörigen Punkten A auf dem Kegelschnitte findet also eine Art von Reciprocität statt, auf die noch näher eingegangen werden soll. Die Reihenfolge der Punkte ist gleichgültig. Jede Konstruktion ist eindeutig, durch fünf Punkte ist also nur ein Kegelschnitt bestimmt.

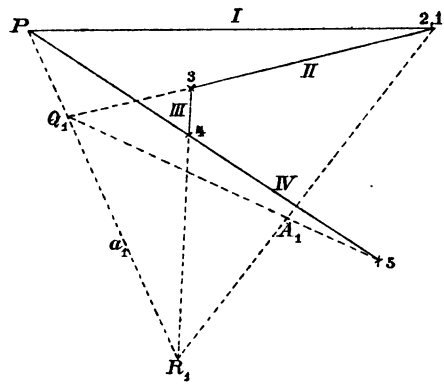
Fig. 2.



4) **Aufgabe.** Den Kegelschnitt aus vier Punkten und der Tangente in einem davon zu konstruieren.

Auflösung. Ist Punkt 1 mit der Tangente I gegeben, außerdem Punkt 3, 4 und 5, so betrachte man 1 als Doppelpunkt (1, 2). Die Geraden I, II, III, IV haben dann dieselbe Bedeutung wie vorher, und die Konstruktion gestaltet sich ganz ebenso.

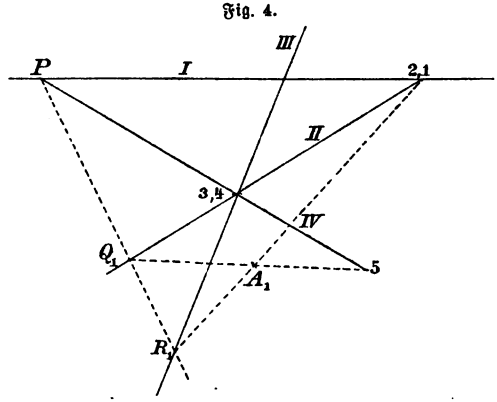
Fig. 3.



5) **Aufgabe.** Den Kegelschnitt aus drei Punkten und den Tangenten in zweien davon zu konstruieren.

Auflösung. Sind I und III die gegebenen Tangenten mit den Berührungspunkten (Doppelpunkten) (1, 2) und (3, 4), und ist 5 der Punkt ohne Tangente, so ziehe man noch $\overline{2, 3}$ oder II und $\overline{4, 5}$ oder IV. Mit den Geraden I, II, III, IV verfahre man dann wie vorher.

Fig. 4.



Bemerkung. Es ist anzuraten, nach jedem Quadranten hin einige Pascalsche Linien zu ziehen. Auch die Fälle, wo Q, R oder A in unendliche Entfernung fallen, müssen Berücksichtigung finden. — Die Art des entstehenden Kegelschnitts läßt sich im allgemeinen durch geeignete Wahl der Punkte vorherbestimmen, nur in der Nähe des Grenzfalles der Parabel ist die Entscheidung schwieriger.

6) Satz des Brianchon.

Mit Hülfe von Pol und Polare wurde der Pascalsche Satz in

Teil II in den des Brianchon verwandelt. Durch Projektion wurde dieser auf beliebige Kegelschnitte übertragen. Er lautet:

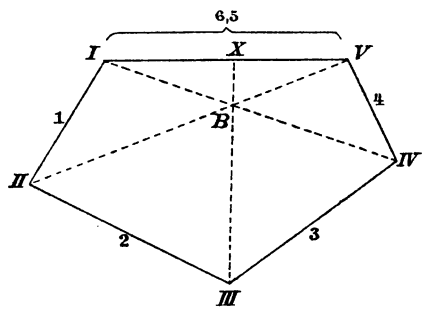
Bei jedem Kegelschnitte schneiden sich die Verbindungslinien der Gegenecken in **einem** Punkte.

Er gilt von gewöhnlichen und überschlagenen Sechsecken, vom umbeschriebenen Fünfeck und dem Berührungspunkte auf einer der Seiten, vom umbeschriebenen Viereck und den Berührungspunkten auf zwei Seiten, vom umbeschriebenen Dreieck und den Berührungspunkten auf den drei Seiten. Er gilt nicht nur von Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel, sondern behält auch Sinn für zwei durch eine Gerade verbundene Punkte. (Sonderfall der Ellipse.) Im letzteren Falle sind z. B. durch die beiden Punkte abwechselnd Gerade zu legen, die als Tangenten aufzufassen sind. Die Verbindungslinien der Gegenecken schneiden sich in einem Punkte.

Es ist zweckmäßig, für jeden Fall eine Zeichnung wirklich auszuführen. Die entsprechenden Konstruktionsaufgaben (mit alleinigem Gebrauch des Lineals zu lösen) sind folgende:

7) **Aufgabe.** Die Berührungspunkte des Kegelschnitts zu konstruieren, der sich einem gegebenen Fünfeck einbeschreiben läßt.

Fig. 5.



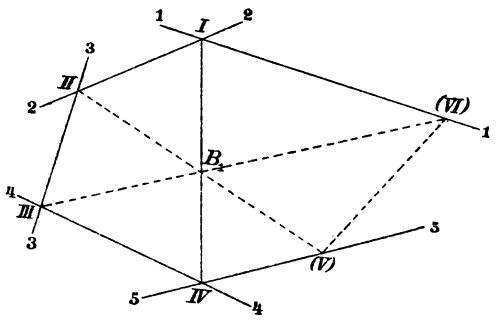
Auflösung. Sind I, II, III, IV, V die Ecken des gegebenen Tangentenfünfecks, so geben $\overline{\text{I IV}}$ und $\overline{\text{II V}}$ als Schnittpunkt den Brianchonschen Punkt B; $\overline{\text{III } B}$ giebt den Berührungspunkt X. Ebenso werden die übrigen Punkte bestimmt. Der Beweis beruht darauf, daß die Gerade $\overline{\text{I, V}}$ als gebrochene Linie 5, 6 betrachtet wird, deren Teile 5 und 6 einen Winkel von 180^0 einschließen.

8) **Aufgabe.** Den durch fünf Tangenten bestimmten Kegelschnitt durch beliebig viele andere Tangenten auszuschattieren.

Auflösung. Die Geraden 1, 2, 3, 4, 5 seien die gegebenen Tangenten, die vorhandenen Eckpunkte seien I, II, III und IV. Man

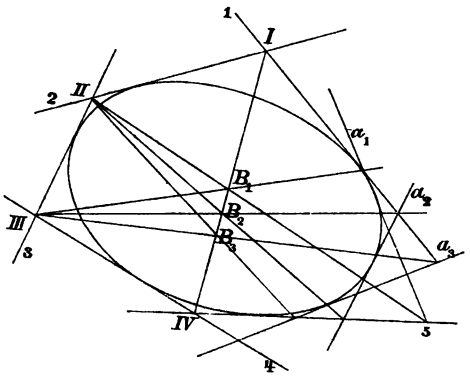
ziehe $\overline{\text{I IV}}$, nehme auf dieser Linie einen beliebigen Brianchon-Punkt B_1 an, ziehe $\overline{\text{II}\,B_1}$ bis zum Schnitte V mit 5, und $\overline{\text{III}\,B_1}$ bis zum Schnitte VI auf 1, dann ist $\overline{\text{V VI}}$ eine der gesuchten Tangenten.

Fig. 6.



Solche kann man beliebig viele konstruieren, indem man B_1 auf der Geraden I IV und ihrer Verlängerung beliebig verschiebt. Dies ist z. B. in Figur 7 geschehen.

Fig. 7.



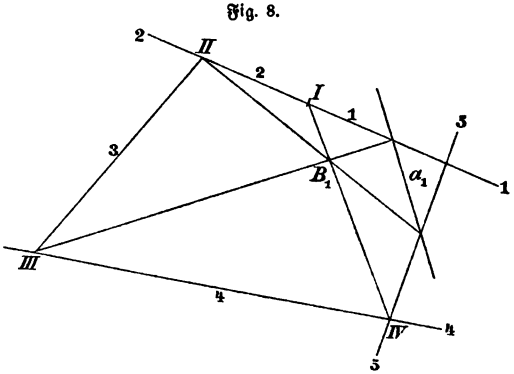
Zu jedem Punkte B_1 gehört also eine bestimmte Tangente a_1. Auf die Art des gegenseitigen Entsprechens soll noch näher eingegangen werden.

9) **Aufgabe.** Den durch vier Tangenten und einen Berührungspunkt bestimmten Kegelschnitt zu konstruieren.

Auflösung.

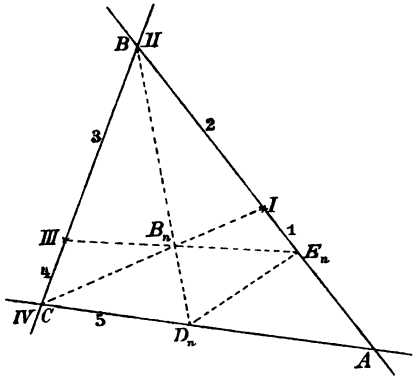
Die gebrochen zu denkende Gerade 1, 2 mit dem Berührungspunkte I sei gegeben, ebenso die Geraden 3, 4 und 5. Die vorhandenen Schnittpunkte seien II, III, IV. Man ziehe I IV und verfahre wie vorher.

Fig. 8.



10) **Aufgabe.** Den durch drei Tangenten und zwei Berührungspunkte bestimmten Kegelschnitt zu konstruieren.

Fig. 9.

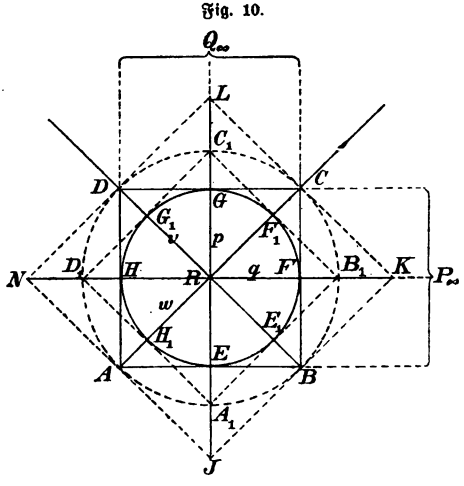


Auflösung. ABC sei das gegebene Dreiseit, I und III die gegebenen Berührungspunkte. Man betrachte AB als in I gebrochene Gerade 1, 2, BC als in III gebrochene Gerade 3, 4, B und C als die Punkte II und IV. Auf I IV nehme man willkürlich den Brianchon-Punkt B_n an. Dann giebt BB_n den Punkt D_n auf 5 und $\mathrm{III}B_n$ giebt E_n auf 1. D_nE_n ist eine der Tangenten des Kegelschnitts. Solche kann man unendlich viele konstruieren.

II. Folgerungen für Centralperspektive, Schließungsprobleme und dergleichen.

11) Das Quadrat und sein einbeschriebener Kreis in Centralperspektive.

Fig. 10.



Durch Centralprojektion geht das Quadrat $ABCD$ (in Figur 10) in ein allgemeines Viereck $ABCD$ (Figur 11) über, dessen Gegenseiten sich in Punkten P und Q schneiden.

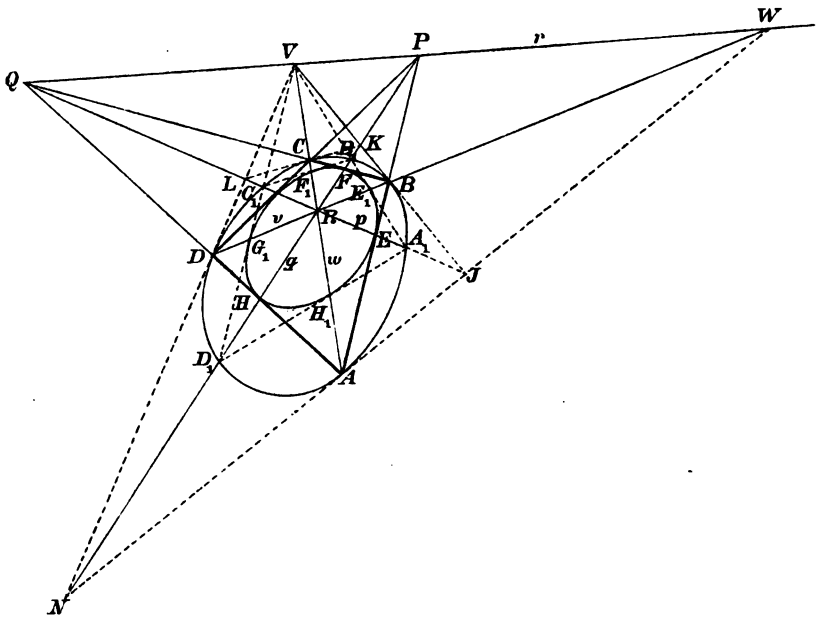
In beiden Figuren schneiden sich die Diagonalen in R.

PR in Figur 11 giebt die Berührungspunkte F und H, QR die Berührungspunkte E und G eines

dem Viereck einbeschriebenen Kegelschnitts, der dem einbeschriebenen Kreise entspricht.

Man kennt also 4 Tangenten und 4 Berührungspunkte desselben, d. h. 8 Stücke, von denen 5 zur Konstruktion mit dem Lineal

Fig. 11.



allein ausreichen. — Die Gerade PQ mit den harmonischen Punkten $PQVW$ entspricht dem unendlichen Bereiche der Ebene von Figur 10. Man vergleiche in beiden Figuren die harmonischen Strahlen und Punkte.

12) Das Quadrat und sein umbeschriebener Kreis in Centralperspektive.

In Figur 10 sind die Tangenten in A und C parallel zu v, die in B und D berührenden parallel zu w. Sie bilden ein umbeschriebenes Quadrat, dessen Ecken auf p und q liegen. Folglich: In Figur 11 sind WA und WC, VB und VD die Tangenten des perspektivisch dargestellten Kreises durch A, B, C und D. Auch hier schneiden sie sich auf p und q. Man hat also 4 Tangenten und ihre 4 Berührungspunkte zur Konstruktion des Kegelschnitts mit dem Lineal allein, während 5 von diesen Stücken ausreichen.

13) Das entsprechende Schließungsproblem.

Beginnt man in Figur 10 in einem beliebigen Punkte des größeren Kreises mit dem Ziehen von Tangenten, so schließt das Tangenten-Sehnen-Quadrat stets. So ist z. B. $B_1C_1D_1E_1$ ein solches Quadrat. Folglich:

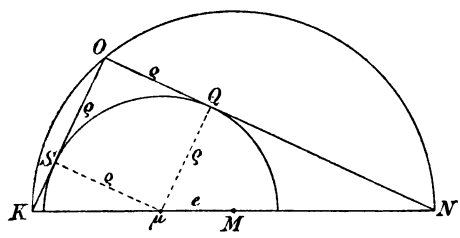
Beginnt man in Figur 11 an irgend einer Stelle des äußeren Kegelschnitts mit dem Ziehen von Tangenten an den inneren, so schließt die letzte Tangente ein Tangenten-Sehnenviereck. So ist z. B. $A_1B_1C_1D_1$ auch hier ein solches Gebilde. Sämmtliche Tangenten-Sehnenvierecke der Figur haben die Schnittpunkte der Gegenseiten auf der Geraden PQ.

[14) Es läßt sich beweisen, daß dieser Schließungssatz auf excentrische Kreise und dann durch Projektion ganz allgemein auf Kegelschnitte übertragen werden kann. Gerade dieser Kreissatz ist durch Jacobi für die höhere Mathematik zu bedeutungsvoller Anwendung gebracht worden. Daher soll eine elementare Ableitung nach rechnender Methode eingeschaltet werden. Als Einleitung diene der einfachere Fall des symmetrischen Vierecks.

Aufgabe. Die Radien r und ϱ zweier Kreise seien gegegeben. Wie groß muß die Entfernung der Mittelpunkte genommen werden, damit sich zunächst ein symmetrisches Tangenten-Sehnenviereck einzeichnen lasse.

Auflösung. In Figur 12 sei KON die Hälfte des gesuchten Vierecks, die Katheten seien $NO = x$ und $KO = y$. Der doppelte Dreiecksinhalt ist.

Fig. 12.



1) $xy = \varrho(x + y)$,

außerdem ist

2) $x^2 + y^2 = 4r^2$.

Aus beiden Gleichungen läßt sich folgende bilden:

$$x^2 + y^2 + 2xy = 4r^2 + 2\varrho(x + y),$$

oder

$$(x + y)^2 = 4r^2 + 2\varrho(x + y),$$

woraus folgt

3) $$x + y = \varrho \pm \sqrt{4r^2 + \varrho^2}.$$

Das negative Zeichen, bei dem es sich um ein Problem der äußeren Berührung (An-Kreis) handelt, soll jetzt nicht berücksichtigt werden.

Statt x und y zu berechnen, setze man $M\mu = e$ und bilde die pythagoreischen Gleichungen

$$K\mu^2 = (r - e)^2 = (y - \varrho)^2 + \varrho^2 = y^2 + 2\varrho^2 - 2\varrho y,$$
$$N\mu^2 = (r + e)^2 = (x - \varrho)^2 + \varrho^2 = x^2 + 2\varrho^2 - 2\varrho x.$$

Durch Addition folgt

$$2r^2 + 2e^2 = (x^2 + y^2) + 4\varrho^2 - 2\varrho(x + y),$$

also unter Berücksichtigung von 2) und 3)

$$2r^2 + 2e^2 = 4r^2 + 4\varrho^2 - 2\varrho\left[\varrho + \sqrt{4r^2 + \varrho^2}\right].$$

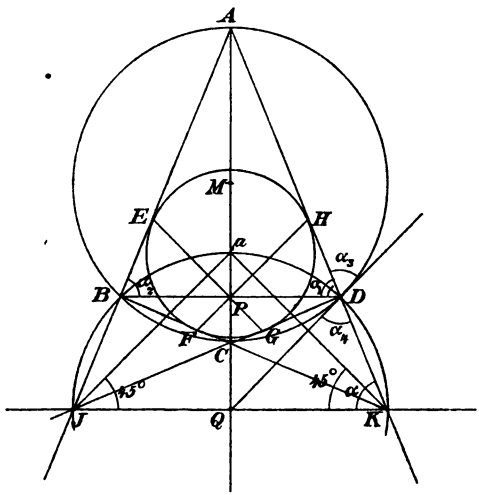
Demnach ist die gesuchte Entfernung zu finden mit Hülfe von

$$e^2 = r^2 + \varrho^2 - \varrho\sqrt{4r^2 + \varrho^2},$$

was leicht konstruiert werden kann.

Nach Teil II Figur 42 schneiden sich Diagonalen und Berührungssehnen in einem Punkte P, dem Pole der dritten Diagonale JK des vollständigen Vierecks für beide Kreise. Der Punkt P und beide Kreise gehören also der Kreisschar an, die von dem durch die Punkte P und Q gehenden Kreisbüschel senkrecht geschnitten wird. Die Vergleichung der Winkelsumme der Vierecke $AEPH$ und $PFCG$ zeigt, daß $\sphericalangle EPH = 90^0$ ist. Aus Symmetriegründen sind also EG und FH unter 45^0 geneigt, also auch μJ und μK, und es ist $QK = Q\mu$. Aus $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$ folgt $QK = QD = Q\mu$. Folglich geht der um Q mit $Q\mu$ geschlagene Kreis durch die Eckpunkte B und D und außerdem durch J und K. Sämmtliche Tangenten an den größeren Kreis, die von Punkten der Geraden JK ausgehen, sind also gleich den Entfernungen dieser Punkte von μ. Hieraus ergiebt sich eine große Zahl von Konstruktionsaufgaben.

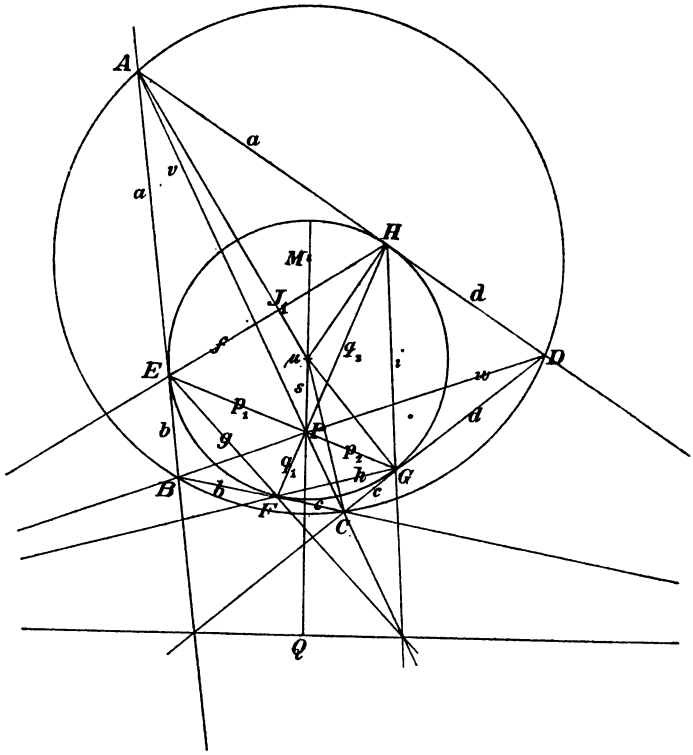
Fig. 12a.



14b) Daß die Berührungssehnen EG und FH auf einander senkrecht stehen, gilt von jedem Tangenten-Sehnenviereck, wie die entsprechende Betrachtung für $AEPH$ und $CFPG$ zeigt. Umgekehrt:

Ist ein Kreis mit Radius ϱ gegeben und legt man durch einen gegebenen Punkt P innerhalb desselben eine

Fig. 12b.



beliebig gerichtete Sehne p und eine auf ihr senkrechte q, so geben die Tangenten in den Endpunkten dieser Sehnen ein Tangenten-Sehnen-Viereck.

Es läßt sich nun zeigen, daß die umbeschriebenen Kreise sämtlicher zu P und dem gegebenen Kreise μ gehörigen Tangenten-Sehnen-Vierecke denselben Radius r und denselben Mittelpunkt M haben. Man setze zum Beweise die Entfernung $\mu P = s$, so daß $\varrho^2 - s^2$ oder k^2 der absolute Betrag der Potenz des Punktes P in Bezug auf den kleineren Kreis ist. Mit Hülfe der Abstände der

Sehnen p und q von μ ist dann leicht zu zeigen, daß $p^2+q^2=4(2\varrho^2-s^2)$ also konstant ist, welche Sehnenrichtung p man auch wähle. Aus der Gleichheit des Peripheriewinkels mit dem zugehörigen halben Centriwinkel folgt die Ähnlichkeit der Dreiecke EFP und $CG\mu$, so daß $c:\varrho=q_1:p_1=p_2:q_2$ ist, wo p_1, p_2, q_1, q_2 die Abschnitte der Sehnen p und q bedeuten. Daraus folgt $CD=c+d=\frac{q_1+q_2}{p_1}\varrho=\frac{q}{p_1}\varrho$. Ebenso ergiebt sich der Wert für die anderen Vierecksseiten, und man hat:

$$AB=\frac{q\varrho}{p_2},\quad BC=\frac{p\varrho}{q_2},\quad CD=\frac{q\varrho}{p_1},\quad DA=\frac{p\varrho}{q_1}.$$

Nach Ptolemäus folgt nun für die Diagonalen v und w von $ABCD$

$$v\cdot w=AB\cdot CD+BC\cdot AD$$

$$=\frac{q^2\varrho^2}{p_1p_2}+\frac{p^2\varrho^2}{q_1q_2}=\frac{p^2+q^2}{q_1q_2}\varrho^2=\frac{4(2\varrho^2-s^2)}{\varrho^2-s^2}\varrho^2.$$

Das Produkt der Diagonalen ist also für alle hier möglichen Tangenten-Sehnen-Vierecke unveränderlich.

Die Summe zweier Gegenseiten ist

$$BC+DA=AB+CD=q\varrho\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\right)=q\varrho\frac{p_1+p_2}{p_1p_2}=\varrho\frac{pq}{\varrho^2-s^2}.$$

Da ferner $(BC+DA)\varrho=F$, d. h. gleich dem Inhalte von $ABCD$ ist, so folgt

$$F=\frac{pq\varrho^2}{\varrho^2-s^2}.$$

Zugleich ist das Produkt zweier Nachbarseiten

$$AB\cdot BC=\frac{pq\varrho^2}{p_2q_2}=\frac{p_1}{q_2}\cdot\frac{pq\varrho^2}{p_1p_2}=\frac{p_1}{q_2}F,$$

bezw.

$$CD\cdot DA=\frac{pq\varrho^2}{p_1q_1}=\frac{q_2}{p_1}\cdot\frac{pq\varrho^2}{q_1q_2}=\frac{q_2}{p_1}F.$$

Die Seiten des Vierecks $EFGH$ sollen f, g, h, i sein.

Nach bekanntem Dreiecksatze ($r=\frac{abc}{4F}$, vergl. Teil II, Nr. 9) ist für die Inhalte der Dreiecke ABC und CDA

$$F=F_1+F_2=\frac{v\cdot AB\cdot BC+v\cdot CD\cdot DA}{4r}=\frac{vF}{4r}\left(\frac{p_1}{q_2}+\frac{q_2}{p_1}\right)$$

$$=\frac{vF}{4r}\frac{p_1^2+q_2^2}{p_1q_2}=\frac{vF}{4r}\frac{f^2}{p_1q_2},$$

also

$$4r=v\frac{f^2}{p_1q_2}$$

und ebenso

$$4r = w\frac{g^2}{p_1 q_1},$$

folglich

$$16r^2 = \frac{vwf^2g^2}{p_1^2 q_1 q_2},$$

oder, da $\triangle JH\mu \sim EFP$, also $\frac{fg}{2p_1} = \varrho$ ist, unter Berücksichtigung des obigen Resultates für $v \cdot w$,

$$r^2 = \frac{(2\varrho^2 - s^2)\varrho^4}{(\varrho^2 - s^2)^2}.$$

Für sämtliche zum Diagonalschnitt P gehörigen Tangenten-Sehnenvierecke ist demnach r konstant.

Sämtliche diese Vierecke haben aber die Schnitte ihrer Gegenseiten auf der Polare von P, und da (nach Teil II Figur 42) die Polare und P auch für den umbeschriebenen Kreis als solche zu einander gehören, so müssen M, μ und P auf einer Geraden liegen und P gehört mit den beiden Kreisen wiederum zu einer Kreisschar. Aber nur ein Kreis auf der betrachteten Seite dieser Schar kann den Radius r haben, folglich haben sämtliche zu P gehörigen Tangenten-Sehnenvierecke denselben Mittelpunkt und Radius für den umbeschriebenen Kreis. Man darf also von dem Falle des symmetrischen Vierecks Figur 12a ausgehen und findet dabei den Satz:

Sind r und ϱ die Radien zweier Kreise und ist die Entfernung der Kreismittelpunkte

$$e = \sqrt{r^2 + \varrho^2 - \varrho\sqrt{4r^2 + \varrho^2}},$$

so schließen sämtliche Tangenten-Sehnenvierecke, wo man auch beginnen möge.

(Unter den zahlreichen Invarianten der Vierecksschar bei gegebenen ϱ und s (und $k^2 = \varrho^2 - s^2$) seien noch folgende genannt: $fghi = 4\varrho^2 k^2$; $\frac{F}{F_1} = \frac{2\varrho^2}{k^2}$, wo F_1 der Inhalt des kleineren Vierecks $EFGH$ ist, denn

$$pq = (p_1 + p_2)(q_1 + q_2) = p_1 q_1 + p_2 q_1 + p_1 q_2 + p_2 q_2 = 2F;$$

$$ac = bd = \varrho^2; \quad \sin A \cdot \sin B = \frac{k^2}{\varrho^2} = \frac{2F_1}{F}.$$

Auch auf die Beziehung $AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA = F^2$ sei aufmerksam gemacht.)

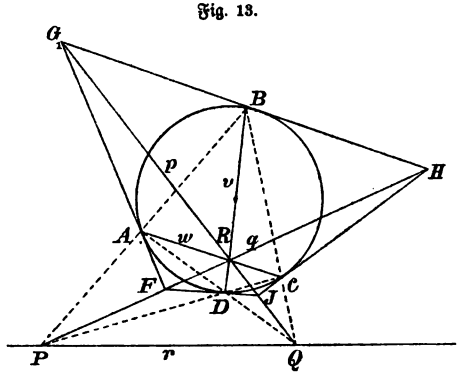
Durch Projektion folgt nun der Satz:

Wird einem Viereck ein beliebiger Kegelschnitt umbeschrieben und ein beliebiger einbeschrieben, so schließen sämtliche Tangenten-Sehnenvierecke, wo man auch beginnen möge.

Mit dem Gegebenen hängt eine große Reihe von Konstruktionsaufgaben zusammen.]

15) Ist ein Kreis und innerhalb desselben ein Punkt R gegeben, so ist dessen Polare r bestimmt. Zu jedem Punkte P der Polare r gehört eine Polare p, die von r in Q geschnitten wird. Die Polare q von Q geht ebenso durch P, so daß P und Q zugeordnete Punkte sind und das Dreieck PQR zu sich selbst reciprok ist. Zieht man von P aus eine beliebige Sekante PAB, sodann BCQ und CDP, so giebt QD stets ein in A schließendes Sehnenviereck, dessen Diagonalen sich in R schneiden. (Warum?) Entsprechendes gilt von $ACDB$ und $ABDC$.

Fig. 13.



16) Reciprok folgt: Zieht man von einem beliebigen Punkte F auf q eine Tangente FA bis zum Schnitte G mit p, sodann GB bis zum Schnitte H mit q, sodann HC bis zum Schnitte J mit p, so giebt die Tangente JD ein in F schließendes Viereck, dessen Berührungssehnen sich in R schneiden.

Beide Schließungssätze gelten von allen Kegelschnitten.

P, Q und R sind ein sogenanntes Tripel von Punkten.

17) Das Schließungsproblem der Tangenten-Sehnendreiecke.

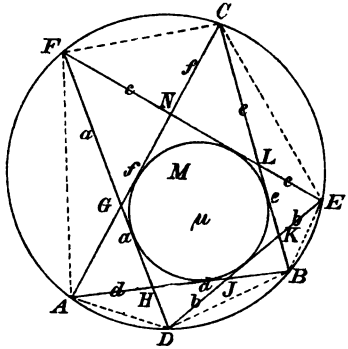
In Teil II, Geometrie Nr. 14 war gezeigt worden, daß, wenn die Mittelpunkte zweier Kreise mit den Radien r und ϱ die Entfernung $e = \sqrt{r^2 - 2r\varrho}$ haben, sich unendlich viele Tangenten-Sehnen-Dreiecke einzeichnen lassen. Wo man auch auf der Peripherie des Außenkreises beginnen möge, Tangenten zu ziehen, stets schließt die Reihe.

Der Satz gilt auch von den äußeren Berührungskreisen des Dreiecks und dem Umkreise, nur ist dann $e = \sqrt{r^2 + 2r\varrho}$. Durch

Projektion gilt er auch von Kegelschnitten. Dort kann er folgendermaßen ausgesprochen werden:

Schließt bei zwei Kegelschnitten ein Tangenten-Sehnendreieck, so schließen sämtliche, wo man auch beginne.

Fig. 14.



Es giebt aber auch noch andere Ausdrucksweisen. In Figur 14 z. B. sind zwei solche Dreiecke dargestellt, ABC nnd DEF. Dabei ist $GHJLN$ ein Brianchon-Sechseck, $ADBECF$ ein Pascal-Sechseck. Es ergiebt sich Folgendes: Zieht man in einem Pascal-Sechseck sämtliche Diagonalen, die Dreiecke abschneiden, d. h. verbindet man alternierende Ecken, so bilden die Diagonalen ein Brianchon-Sechseck.

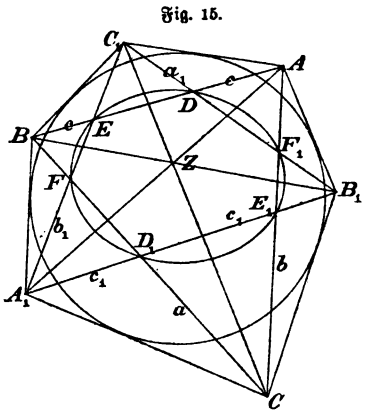
Der reciproke Satz für dieselbe Figur lautet:

Verlängert man in einem Brianchon-Sechseck die alternierenden Seiten bis zum Durchschnitt, so entstehen zwei Dreiecke, deren Ecken ein Pascal-Sechseck bilden.

18) Ein Gegenstück zum vorigen Problem.

Verlängert man die alternierenden Seiten eines Pascal-Sechsecks bis zum Durchschnitt, so entstehen zwei Dreiecke, deren Ecken ein Brianchon-Sechseck bilden.

Fig. 15.



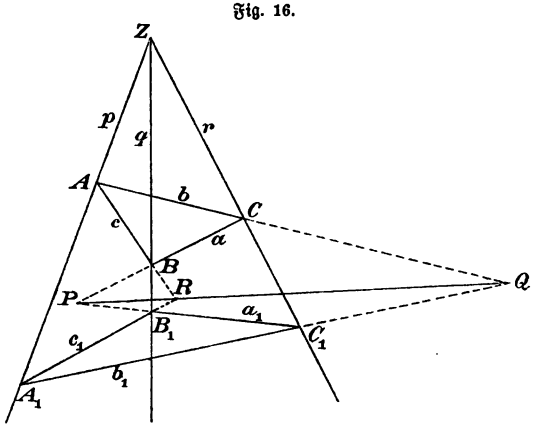
Oder: Schneidet man von einem Brianchon-Sechseck mittels der entsprechenden Diagonalen lauter Dreiecke ab, so bilden die sechs Diagonalen ein Pascal-Sechseck.

Der Beweis läßt sich auf verschiedene Weise führen. Eine räumliche Beweisführung ergiebt sich aus Figur 16.

ABC und $A_1B_1C_1$ seien zwei Dreiecke, deren entsprechende Verbindungslinien sich in einem Punkte Z schneiden; dann läßt

sich $Z(A_1 B_1 C_1)$ als Zeichnung einer dreiseitigen Pyramide betrachten, die durch die Fläche ABC schräg abgeschnitten ist. Da nun bei dieser Anschauung a und a_1 in derselben Ebene liegen, so schneiden sie sich in einem Raumpunkte P. Ebenso schneiden sich b und b_1 in einem Raumpunkte Q, c und c_1 in einem Raumpunkte R. Da aber die Schnittebenen ABC und $A_1 B_1 C_1$ sich in einer Geraden schneiden, so müssen P, Q, R in einer geraden Linie liegen.

Fig. 16.



Das entsprechende gilt von Figur 15 und damit ist der Sechseckssatz bewiesen.

Der Hülfssatz lautet: Liegen zwei Dreiecke so, daß die Verbindungslinien ihrer Ecken durch einen Punkt gehen, so schneiden sich die entsprechenden Seiten in Punkten, die auf einer Geraden liegen.

Der reciproke Satz für dieselbe Figur lautet:

Schneiden sich die entsprechenden Seiten zweier Dreiecke in Punkten, die auf einer Geraden liegen, so schneiden sich die Verbindungslinien entsprechender Ecken in einem Punkte.

Auf Grund des Reciprocität ist ein besonderer Beweis nicht nötig. Er läßt sich selbständig durch eine ähnliche Raumbetrachtung führen.

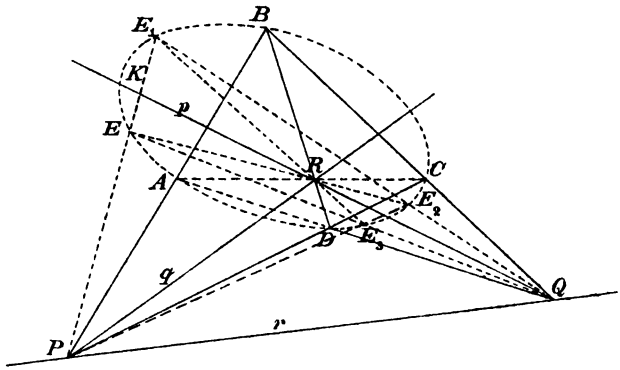
Dreiecke solcher Art bezeichnet man als perspektivische Dreiecke.

In dem Satze sind zahlreiche andere als specielle Fälle enthalten. Man vergl. z. B. Figur 43 in Teil II und den Satz über das Fußpunktdreieck der durch einen Punkt gelegten Ecktransversalen eines Dreiecks.

19) Durch vier Punkte A, B, C und D lassen sich unendlich viele Kegelschnitte legen. Bildet man noch die Schnittpunkte P, Q und R und die zugehörigen Polaren p, q und r, so ist das Dreieck PQR für diese sämtlichen Kegelschnitte sich selbst reciprok. Die Polare p wird also von sämtlichen Kegelschnitten so geschnitten, daß die Tangente im Schnittpunkte durch P geht. Entsprechendes findet mit q bezw. r statt.

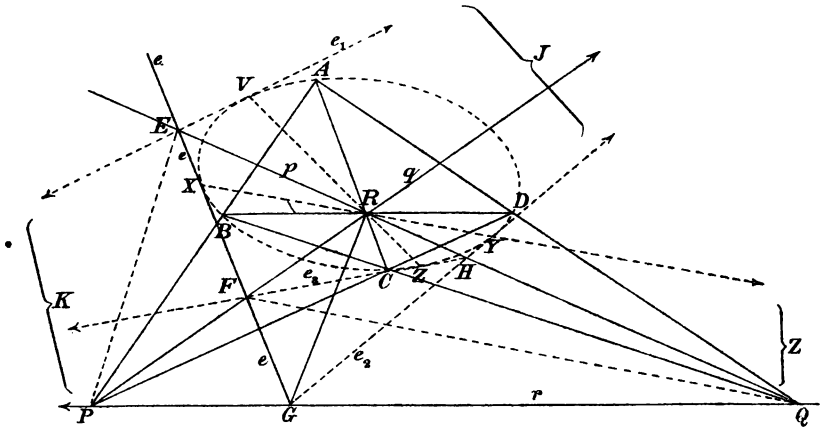
Wird noch ein fünfter Punkt E des Kegelschnitts gegeben, so kann man letzteren nach Pascal durchkonstruieren. Man findet aber auch sofort mit Hülfe der Polaren drei weitere Punkte E_1, E_2 und E_3. So ist E_1 der vierte harmonische zu P, K und E. Die Geraden $E_1 Q$ und ER

Fig. 17.



geben als Schnitt E_2, $E_2 P$ und EQ geben E_3. (Vergl. das Schließungsproblem unter 15.) Bildet man jetzt aus vier beliebigen von den acht Punkten ein neues Viereck, so ergeben sich $3 \cdot 4 = 12$ neue Punkte u. s. w. Jede Konstruktion ist eindeutig, also ist wiederum der Kegelschnitt durch 5 Punkte eindeutig bestimmt.

Fig. 18.



Statt des Punktes E kann auch eine Tangente e gegeben sein (ohne Angabe des Berührungspunktes). Hier versagt die Konstruktion nach Pascal, man findet aber sofort drei weitere Tangenten e_1, e_2

und e_3 durch folgende Überlegung. Wird die Polare r von e in G geschnitten, so muß die von G aus gezogene Tangente e_2 der vierte e zugeordnete Strahl zu GQ, GR und e sein. Sind nämlich X und Y die Berührungspunkte mit dem zu konstruierenden Kegelschnitte, so geht XY durch R, und X, Y, R und Z auf r sind harmonische Punkte. Nun schneidet e_2 die Gerade p in H und die Gerade q in J, während e die Gerade p in E und q in F schneidet. Die Geraden EJ und HF geben die Tangenten e_1 und e_3, die sich in K auf r schneiden, so daß auf jeder Polare zwei Tangentenschnitte liegen. Da P, Q, G, K harmonische Punkte sind, so können auch die zweiten Tangenten in E und F mit Hülfe des vierten harmonischen Strahles konstruiert werden. (Vergl. Schließungsproblem 16.) Die fertige Konstruktion kann mit Hülfe des Involutionssatzes von Desargues durchgeführt werden. (Siehe Anhang.)

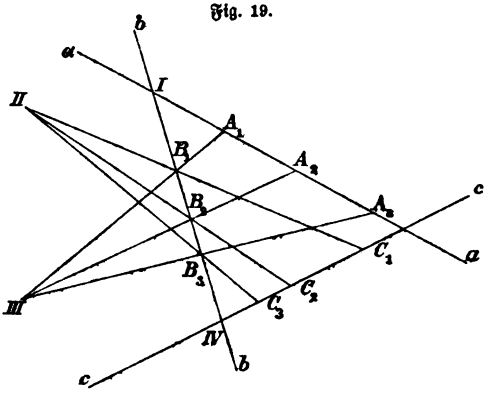
20) **Aufgabe.** Die reciproken Betrachtungen zu Abschnitt 19 anzustellen, bei denen es sich um Kegelschnitte handelt, von denen vier Tangenten gegeben sind, zu denen noch eine fünfte, oder ein Punkt tritt.

Bemerkung. Aus den letzten Betrachtungen ergiebt sich, daß, wenn von einem Kegelschnitte vier Tangenten und ein Punkt, oder vier Punkte und eine Tangente gegeben sind, man acht Stücke kennt, nämlich vier Tangenten und vier Punkte. Durch diese sind aber im allgemeinen jedesmal zwei Kegelschnitte bestimmt.

III. Projektivische Punktreihen.

21) Betrachtet man eine der Kegelschnittkonstruktionen nach Brianchon, z. B. die Konstruktion aus fünf Tangenten, so erkennt man leicht, daß sie sich aus dem Zusammenhange mit dem betreffenden Satze (über Kreis oder Kegelschnitte) ganz herauslösen läßt. Was hat dabei eigentlich stattgefunden? Gegeben waren die Punkte I, II, III, IV als Schnittpunkte der gegebenen Geraden a, $\overline{\text{I III}}$, $\overline{\text{II III}}$, $\overline{\text{III IV}}$

Fig. 19.



und c. Man hat die Gerade $\overline{\text{I IV}}$ oder b gezogen. Jeder Punkt B_n derselben ist von II aus auf c und von III aus auf a projiziert worden, was die Punkte C_n und A_n gegeben hat. Jede Verbindungslinie A_nB_n wurde Tangente des gesuchten Kegelschnitts.

Durch Projektion der Figur 19 wird nichts Wesentliches geändert. Demnach gilt Folgendes:

Projiziert man die (nummerierten) Punkte einer festen Geraden von zwei festen Punkten aus auf zwei andere gegebene Gerade, und verbindet man je zwei zusammengehörige (gleichzahlige) Projektionspunkte mit einander, so umhüllen die Verbindungslinien einen Kegelschnitt, der auch die Träger der neuen Punktreihen und die Verbindungslinien zwischen den beiden Projektionscentren unter sich und mit den Schnitten der projizierten Geraden zu Tangenten hat.

22) Punktreihen wie $A_1, A_2, A_3, \ldots, C_1, C_2, C_3, \ldots$, die durch zwei verschiedene Projektionen aus ein und derselben Punktreihe entstanden sind, bezeichnet man als projektivische Punktreihen.

Der gefundene Satz läßt sich jetzt folgendermaßen ausdrücken:

Die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier projektivischer Punktreihen umhüllen einen Kegelschnitt, der auch die Träger der Punktreihen zu Tangenten hat.

Man kann diesen Satz als eine neue Definition des Kegelschnitts betrachten. Diese Erklärung ist unabhängig von jeder Maßbeziehung. Daß eine solche Definition möglich ist, charakterisiert die Kegelschnitte als rein projektivische Gebilde und klärt darüber auf, daß manche Konstruktionen ohne Hülfe des Zirkels ausgeführt werden konnten. Man wird schon jetzt erkennen, daß man mit dem gefundenen Satze den ersten wirklichen Einblick in das Gebiet der Geometrie der Lage (im Gegensatz zur Geometrie des Maßes) gewonnen hat.

23) Sind die Punkte B_1, B_2, B_3 und B_4 harmonische, so sind nach Teil II Nr. 47) auch A_1, A_2, A_3, A_4 harmonische und ebenso C_1, C_2, C_3, C_4 harmonische. Harmonischen Punkten einer Punktreihe entsprechen also harmonische Punkte jeder zu ihr projektivischen Punktreihe. In dieser Beziehung liegt aber noch nicht das allgemeinste Charakteristikum, von dem später gesprochen werden soll.

24) Auch die Punktgruppen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ und $B_1, B_2, B_3, \ldots$ sind projektivische, jedoch sagt man von ihnen, sie befinden sich in

perspektivischer Lage. Verbindet man die gleichnamigen Punkte, so gehen sämtliche Verbindungslinien durch einen Punkt, umhüllen also einen unendlich kleinen Kegelschnitt.

Man braucht nur die eine Gerade aus ihrer Lage zu verschieben und zu verdrehen, um den perspektivischen Charakter aufzuheben. Dann treffen die Strahlen nicht mehr denselben Punkt, sondern sie umhüllen einen Kegelschnitt.

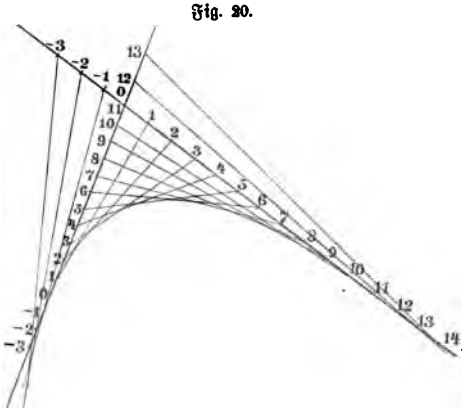
25) Nun lassen sich zwei Gruppen harmonischer Punkte dadurch in perspektivische Lage bringen, daß man zwei gleichnamige Punkte aufeinanderlegt. Vergl. Teil II, Geom. Nr. 50. Folglich:

Projektivische Punktreihen lassen sich stets in perspektivische Lage bringen. Die eine Gruppe läßt sich also auch direkt aus der andern durch Projektion erzeugen.

26) Sind die Träger a und b parallel, so nennt man die perspektivischen Punktreihen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ und $B_1, B_2, B_3, \ldots$ ähnliche. Sind dabei auch die projizierenden Strahlen parallel, so nennt man sie congruente Punktreihen. Sind die Träger a und b nicht parallel, die projizierenden Strahlen aber parallel, so sind die Punktreihen ebenfalls ähnliche.

Bringt man ähnliche oder congruente Punktreihen in eine nicht perspektivische gegenseitige Lage, so muß die Umhüllungscurve der Verbindungslinien zusammengehöriger Punkte ein Kegelschnitt sein. Dieser Kegelschnitt hat nur einen Arm, reicht aber ins Unendliche, er ist also eine Parabel. Folglich:

Fig. 20.



Folgen auf zwei Geraden Punktreihen in gleichem Abstande auf einander, so ist die Umhüllungscurve der Verbindungslinien einander entsprechender Punkte im allgemeinen eine Parabel.

Im Falle gleichen Abstandes für beide Geraden wird die Zeichnung eine symmetrische.

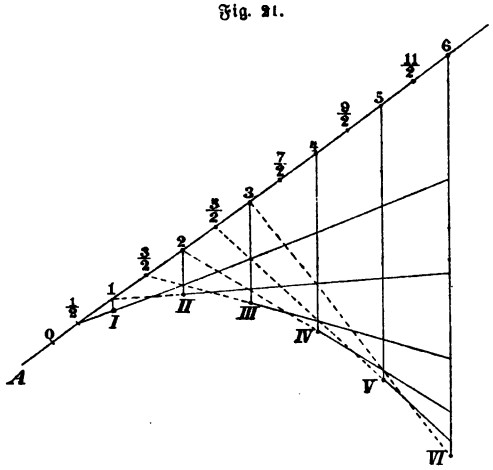
Durch die Kongruenz und Ähnlichkeit, ebenso durch die gleichen

Abstände, hat man wieder eine Maßbeziehung in die Betrachtung eingeführt, jedoch erleichtert dies für die Schulzwecke die Betrachtung.

27) Die Hochschule beginnt die neuere Geometrie der Kegelschnitte mit der Definition durch projektivische Punktreihen. Für unsern Zweck reicht es aus, die folgende Möglichkeit einer Umkehrung des früheren Lehrganges anzudeuten:

a) Die Erklärung der Parabel kann auf dem Wege der Mechanik oder Kinematik (Kinetik) gegeben werden. Ein Punkt bewege sich auf der Geraden AB mit konstanter Geschwindigkeit, diese senke sich aber dabei mit gleichförmig beschleunigter Geschwindigkeit. Nach dem Fallgesetze (vgl. Teil II, Geom. Nr. 104) ist dann der Senkungsweg in t Sekunden $h = \frac{1}{2} g t^2$, wo $\frac{g}{2}$ die Senkung in der ersten Sekunde ist. Die Senkung ist also nach 1, 2, 3, 4, 5, ... Sekunden $\frac{g}{2}$, $4\frac{g}{2}$, $9\frac{g}{2}$, $16\frac{g}{2}$, $25\frac{g}{2}$ u. s. w. Statt also nach 1, 2, 3, 4, 5 ... zu gelangen, gelangt der Punkt nach I, II, III, IV, V .... Die so konstruierten Punkte sind Punkte einer Parabel. Solche Punkte kann man beliebig viele einschalten. (Vgl. Teil II, Fig. 187.)

Fig. 21.



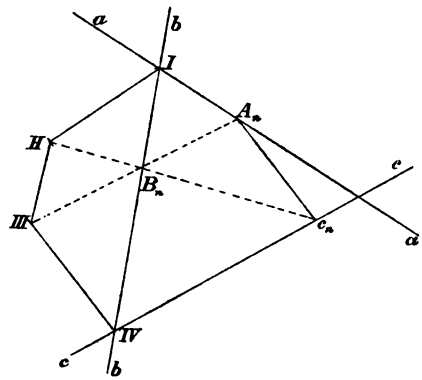
Angenommen, das Senken hörte auf, wenn der „Körper" in einem der Punkte angekommen ist, so würde er nach dem Beharrungsgesetze der Mechanik in der Tangente weiter gehen und die benachbarte Senkrechte um $\frac{g}{2}$ höher erreichen, als es vorher geschah. Also sind die Tangenten der Parabel sehr bequem mit Hülfe der Länge $\overline{1\,\mathrm{I}} = \frac{g}{2}$ zu konstruieren. Zieht man die Tangenten bis zur größten der Senkrechten durch, so sieht man auf dieser das Fallgesetz für die einzelnen Sekunden $1 : 3 : 5 : 7 : 9 \ldots$ veranschaulicht. Auf der Tangente AB aber schneiden die gezeichneten Tangenten

gleiche Stücke ab. Dasselbe geschieht ebenso auf jeder andern der gezeichneten Tangenten. Folglich stimmt die Definition der Mechanik mit der Definition aus den Verbindungslinien der Punkte, die auf zwei Trägern in gleichem Abstande auf einander folgen, überein.

b) Jetzt definiert man jeden Kegelschnitt als Projektion einer Parabel. Daraus folgt, daß man durch die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte zweier projektivischer Punktreihen einen Kegelschnitt erhält.

c) Ist nun b die ursprüngliche Punktreihe, c die von II aus projizierte, a die von III aus projizierte, und sind A_n und C_n die Projektionen von B_n, so ist A_nC_n eine Tangente des Kegelschnitts, der außerdem, wie die Konstruktion zeigt, die Geraden a, c, $\overline{\text{I II}}$, $\overline{\text{II III}}$, $\overline{\text{III IV}}$ berührt. Demnach ist A_n I II III IV C_n ein Tangentensechseck, und in diesem treffen sich die Diagonalen I IV, II C_n und III A_n in einem Punkte. Damit ist der Brianchon-Satz, wenn man von der Parabeldefinition absieht, ohne die Geometrie des Maßes bewiesen. Die Hochschule ist imstande, jeden Rest von Maßgeometrie aus der Betrachtung zu entfernen. (Vgl. Thomae: Die Kegelschnitte in rein projektiver Behandlung. Dort wird alles aus dem Satze über perspektivische Dreiecke abgeleitet.)

Fig. 21b.

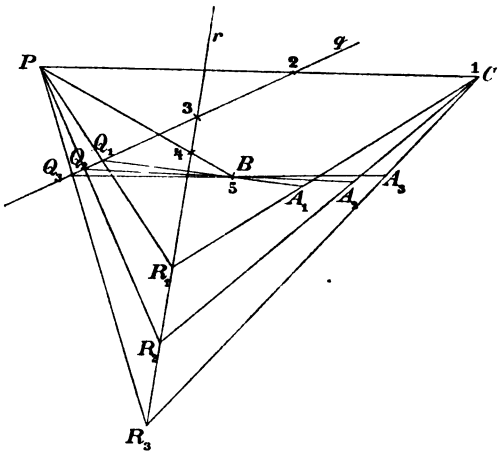


IV. Projektivische Strahlenbüschel.

28) Die reciproke Betrachtung läßt sich an jede Aufgabe der Pascalschen Gruppe, z. B. Aufgabe 3, anschließen. Bei dieser ist im Grunde nur Folgendes geschehen.

Die Punktreihe der R_n auf einer festen Geraden r ist mit zwei Punkten P und C verbunden worden, was die Strahlenbüschel P und C giebt. Das Strahlenbüschel P ist durch eine Gerade q geschnitten, was die Punktreihe der Q_n giebt. Die Punktreihe der Q_n

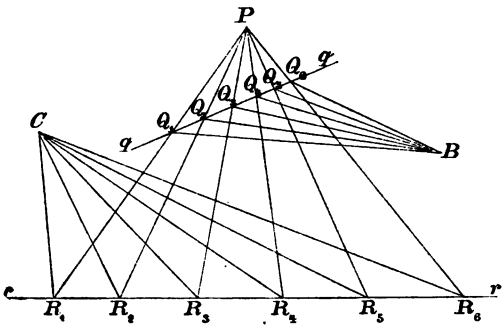
Fig. 22.



ist mit einem festen Punkte B verbunden worden, was ein Strahlenbüschel B giebt. Die gleichnamigen Strahlen der Büschel B und C schneiden sich in Punkten A_n, die einem Kegelschnitte angehören, der durch C, 2, 3, 4, B geht.

Schneidet man das Strahlenbüschel P durch eine Gerade r, und verbindet man die Punkte R mit einem Punkte C, so kann man das Strahlenbüschel C als eine Projektion des Büschels P, vermittelt durch die Gerade r, betrachten. Ebenso ist das Büschel B eine Projektion vom Büschel P. Die Büschel B und C, die durch verschiedene Projektionen aus demselben Büschel P entstanden sind, bezeichnet man als projektivische Strahlenbüschel. Von den Büscheln P und C sagt man, sie befinden sich in perspektivischer Lage, ebenso von den Büscheln P und B. Die Gerade heißt Perspektivitätsachse.

Fig. 23.



Die ganze Ausdrucksweise ist die reciproke zu der im vorigen Abschnitte angewandten. An Stelle der Punkte sind Strahlen, an Stelle der Punktreihen Strahlenbüschel getreten und umgekehrt.

Aus der oben genannten Konstruktion folgt der Satz: Die Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen projektivischer Strahlenbüschel liegen auf einem Kegelschnitte, der auch durch die Büschelpunkte geht.

Dieser Satz ist unabhängig von jeder Maßbeziehung.

Er kann zu einer neuen Definition des Begriffs Kegelschnitt verwandt werden.

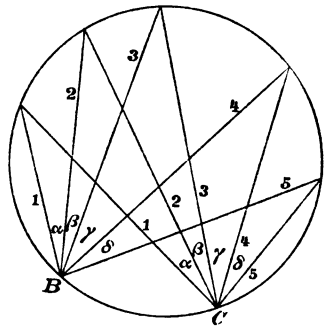
29) Auch hier gehören, wie aus der Projektion hervorgeht, zu harmonischen Strahlen des Büschels C solche von P, und zu harmonischen Strahlen von P solche von B. Folglich gilt dasselbe von B und C. Also: Bei projektivischen Strahlenbüscheln gehören zu harmonischen Strahlen des einen harmonische Strahlen des andern. Aber auch hier giebt es eine noch allgemeinere Beziehung, deren Behandlung noch folgt.

Da sich übrigens zwei Gruppen harmonischer Strahlen stets in perspektivische Lage bringen lassen, so folgt, daß projektivische Strahlenbüschel stets in perspektivische Lage gebracht werden können.

30) Strahlenbüschel können kongruent bezw. ähnlich sein. Sieht man von der Länge der Strahlen ab, so sind ähnlich und kongruent hier identisch.

Nach dem Satze von der Gleichheit der Peripheriewinkel am Kreise geben aber zwei kongruente Strahlenbüschel B und C als Ort der Durchschnitte entsprechender Strahlen einen Kreis. (Fig. 24.)

Fig. 24.



Projektion des letzteren giebt einen Kegelschnitt, die Projektion kongruenter Strahlenbüschel giebt aber projektivische Strahlenbüschel. (Es sind gewissermaßen mit demselben Büschel zwei Projektionen vorgenommen worden.)

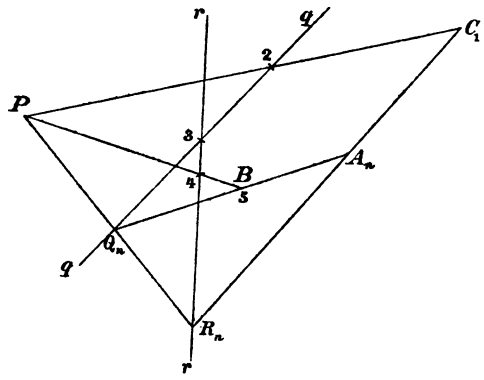
Man könnte also auch hier den Unterrichtsgang umkehren und sagen:

a) Kongruente Strahlenbüschel geben einen Kreis.

b) Demnach geben projektivische Strahlenbüschel einen Kegelschnitt.

c) Ist nun P ein Strahlenbüschel, geschnitten durch r und q, und sind $B_{(5)}$ und $C_{(1)}$ feste Punkte, sind ferner Q_n und R_n, ebenso Q_n und A_n zusammengehörige Punkte der Projektivbüschel durch P, B und C, so ist der Ort für A_n, wie die Konstruktion zeigt, ein Kegelschnitt, der durch folgende Punkte geht: durch C_1, durch 2, d. h. den Durchschnitt von q und dem gemeinschaftlichen Strahle PC_1, durch 3, den Schnitt von q und r, durch 4, den Schnitt von r und dem gemeinschaftlichen Strahle PB und durch B_5. Man hat also in $C_1 2 3 4 B_5 A_n$ ein Sehnen-

Fig. 25.



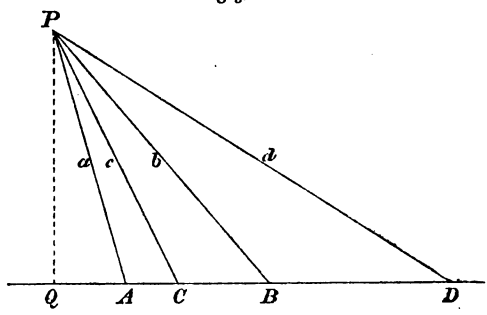
sechseck eines Kegelschnitts. P, Q_n und R_n sind die Schnittpunkte der Gegenseiten desselben, und diese liegen auf einer Geraden. Damit ist, wenn man von der Definition des Kreises bezw. der gleichen Winkel absieht, der Pascalsche Satz ohne jede Maßbeziehung bewiesen. Die Hochschule kann auch hier jeden Rest von Maßbeziehungen entfernen.

V. Das Doppelverhältnis.

31) Das eigentliche Charakteristikum der gegenseitigen Beziehungen projektivischer Punktreihen und Strahlenbüschel ergiebt sich folgendermaßen.

Sind A, B, C und D harmonische Punkte, so ist

Fig. 26.



$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD},$$

oder wenn man $-BC$ für CB schreibt,

$$\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}$$

oder

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1.$$

Ist aber D nicht der vierte harmonische, sondern ein beliebiger Punkt der Geraden, so ist $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ verschieden von -1 und hat für jede Lage von D einen bestimmten Wert. Da es sich um das Verhältnis zweier Verhältnisse handelt, nennt man den Ausdruck das Doppelverhältnis der vier Punkte und bezeichnet es als $(ABCD)$.*)

*) Bei der hier gewählten Schreibweise sind die zugeordneten Punkte nebeneinander geschrieben.

32) Es fragt sich nun, ob, wenn man die Punkte A, B, C, D mit einem beliebigen Punkte P verbindet, für die Strahlen etwas Entsprechendes gilt.

Bezeichnet man den Winkel zwischen a und c mit (ac), so ist

$$2 \cdot \triangle APC = PA \cdot PC \sin(ac) = AC \cdot PQ,$$

folglich

$$\frac{AC}{\sin(ac)} = \frac{PA \cdot PC}{PQ}, \text{ und ebenso } \frac{BC}{\sin(bc)} = \frac{PB \cdot PC}{PQ},$$

durch Division also

1) $$\frac{AC}{BC} = \frac{PA}{PB} \cdot \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)}.$$

Ebenso ist

$$\frac{AD}{\sin(ad)} = \frac{PA \cdot PD}{PQ}, \quad \frac{BD}{\sin(bd)} = \frac{PB \cdot PD}{PQ},$$

also durch Division

2) $$\frac{AD}{BD} = \frac{PA}{PB} \cdot \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}.$$

Durch Division ergiebt sich aus 1) und 2) die Beziehung

3) $$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}.$$

Die linke Seite ist das Doppelverhältnis der vier Punkte. Die rechte Seite heißt analog das Doppelverhältnis der vier Strahlen. Es wird mit $(abcd)$ bezeichnet. A und B, ebenso C und D sind zugeordnete Punkte, a und b, ebenso c und d zugeordnete Strahlen. Gleichung 3 lautet in der vereinfachten Schreibweise

4) $$(ABCD) = (abcd).$$

Also: Das Strahlenbüschel und die schneidende Gerade haben für je vier Elemente dasselbe Doppelverhältnis.

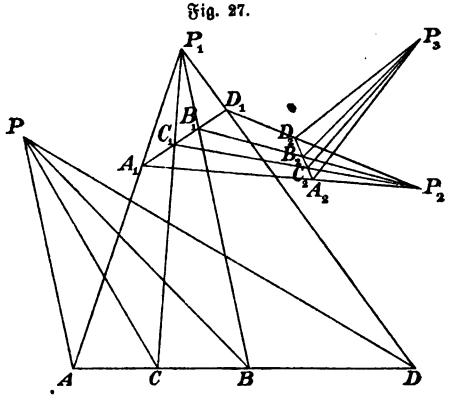
33) Bildet man nun aus dem Strahlenbüschel P auf projektivischem Wege ein perspektivisches P_1, so ist

$$(abcd) = ABCD = (a_1 b_1 c_1 d_1).$$

Bildet man aus der Punktreihe $ABCD$ eine perspektivische $A_1 B_1 C_1 D_1$, so ist

$$ABCD = (abcd) = A_1 B_1 C_1 D_1.$$

Fig. 27.



Wie man nun auch projektivisch fortfahren möge, stets bleibt der Wert der Doppelverhältnisse unveränderlich.

Folglich gelten die Sätze:

Bei projektivischen Punktreihen haben je vier Punkte des einen stets dasselbe Doppelverhältnis, wie die entsprechenden Punkte des andern.

Bei projektivischen Strahlenbüscheln haben je vier Strahlen des einen dasselbe Doppelverhältnis, wie die entsprechenden Strahlen des andern.

Da aber auch die Doppelverhältnisse der Strahlen und der zugehörigen Punktgruppen gleich sind, so folgt ganz allgemein:

Bei projektivischen Gebilden ist für je vier Paare einander entsprechender Elemente das Doppelverhältnis dasselbe.

Die drei Sätze geben die Gleichungen:

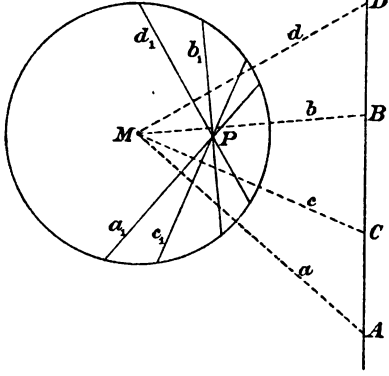
$$(ABCD) = (A_1B_1C_1D), \quad (abcd) = (a_1b_1c_1d_1),$$
$$(ABCD) = (a_1b_1c_1d_1).$$

34) Bei der kongruenten Abbildung sind die homologen Winkel gleich, die Längen homologer Seiten ebenfalls gleich.

Bei der ähnlichen Abbildung sind die homologen Winkel gleich und die Längen homologer Seiten stehen in konstantem Verhältnis.

Bei der Abbildung durch Projektion ist das Doppelverhältnis von je vier Punkten auf einer Geraden gleich dem der vier entsprechenden Punkte; ebenso ist das Doppelverhältnis von je vier Strahlen gleich dem der vier entsprechenden Strahlen.

Fig. 28.



35) Es giebt aber nach Obigem auch projektivische Beziehungen, bei denen das Doppelverhältnis von je vier Punkten auf einer Geraden gleich dem der vier entsprechenden Strahlen durch einen Punkt ist, und umgekehrt, das von vier Strahlen durch einen Punkt gleich dem der vier entsprechenden Punkte auf der entsprechenden Geraden.

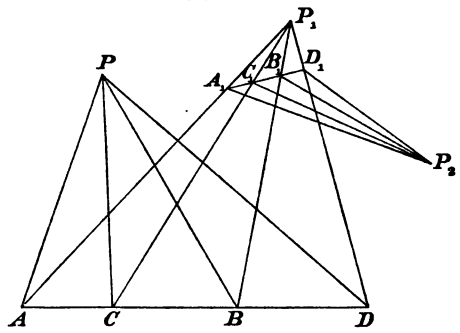
Dies geschieht z. B. bei der Abbildung durch reciproke Polaren.

Verbindet man nämlich die Punkte $ABCD$ in Figur 28 mit M, so sind zunächst die Doppelverhältnisse $(ABCD)$ und $(abcd)$ einander gleich. Ist aber P der Pol der Geraden p, und fällt man von ihm aus auf die Strahlen a, b, c, d Lote, so erhält man die Polaren a_1, b_1, c_1, d_1 der Punkte $ABCD$, und diese bilden ein zum vorigen kongruentes Strahlenbüschel, denn sie folgen unter denselben Winkeln aufeinander, wie jene. Aus $(ABCD) = (abcd)$ und $(abcd) = (a_1 b_1 c_1 d_1)$ folgt $(ABCD) = (a_1 b_1 c_1 d_1)$.

Durch Projektion dieser Figur erkennt man, daß ganz allgemein bei der Abbildung durch reciproke Polaren mittels eines beliebigen Kegelschnitts die Doppelverhältnisse $(ABCD)$ und $(a_1 b_1 c_1 d_1)$ ebenfalls gleich bleiben.

36) Durch Abbildung mittels reciproker Polaren wird jede Figur von der Gestalt 29 in eine von der Gestalt 30 verwandelt, d. h. perspektivische Strahlenbüschel verwandeln sich in perspektivische Punktreihen; ebenso verwandeln sich projektivische Strahlenbüschel in projektivische Punktreihen, und umgekehrt.

Fig. 29.

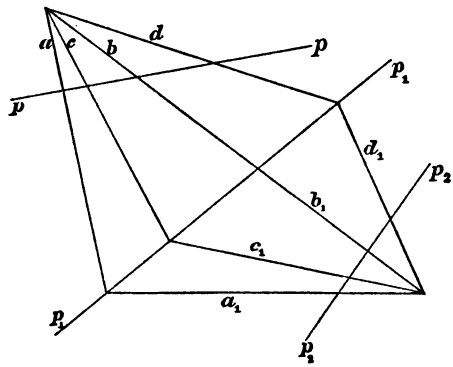


Die Verbindungslinien entsprechender Elemente projektivischer Punktreihen gehen also über in die Durchschnittspunkte entsprechender Elemente von projektivischen Strahlenbüscheln. Folglich:

Durch Abbildung mittels reciproker Polaren gehen sämtliche Punkte jedes Kegelschnitts über in die sämtlichen Tangenten eines entsprechenden Kegelschnitts.

Dabei bleiben sowohl

Fig. 30.



die harmonischen Verhältnisse, als auch die Doppelverhältnisse allgemeiner Art erhalten.

Noch ein Punkt sei hier erwähnt: Betrachtet man das Doppelverhältnis

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = (ABCD) = k,$$

so sind im ganzen 24 Umstellungen in der Reihenfolge der Punkte möglich. Von diesen sämtlichen Doppelverhältnissen stimmen je vier mit einander überein, so ist z. B., wie die ursprüngliche Schreibweise zeigt,

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = k.$$

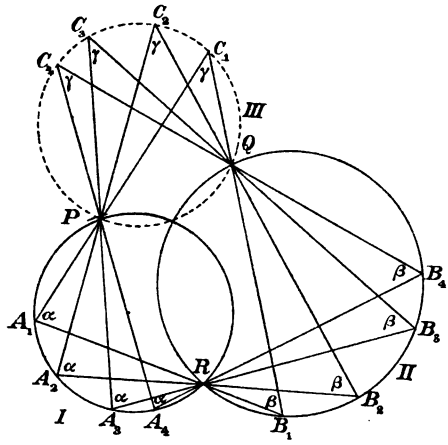
(Die übrigen geben die Werte $\frac{1}{k}$, $1 - k$, $\frac{1}{1-k}$, $\frac{k-1}{k}$ und $\frac{k}{k-1}$.)

Entsprechendes findet für Strahlen statt.

VI. Einige Beispiele projektivischer Strahlenbüschel und Punktreihen.

37) Figur 31 stellt zwei feste Kreise dar, die sich in R schneiden. Auf ihnen sind die festen Punkte P und Q angenommen. Durch R sind beliebig viele Sekanten AB gelegt, durch die A und den Punkt P, ebenso durch die B und den Punkt Q die entsprechenden Strahlen gezogen. Die zusammengehörigen Strahlen geben einen Kreis durch P und Q und den zweiten Schnittpunkt. Der Beweis liegt, elementar betrachtet, darin, daß alle α gleich sind, ebenso alle β, daß also jedes $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$ ist. Demnach liegen die C sämtlich auf einem Kreise.

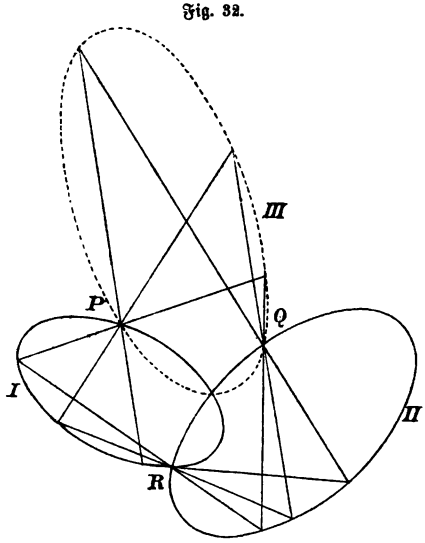
Fig. 31.



Projektivisch lautet der Beweis folgendermaßen: Büschel P und R sind kongruent; Büschel R und Q ebenfalls, folglich sind auch

Büschel P und Q kongruent. — Die Möglichkeit der Übertragung von Fig. 31 in Fig. 32 durch Projektion ist selbstverständlich.

Fig. 32.

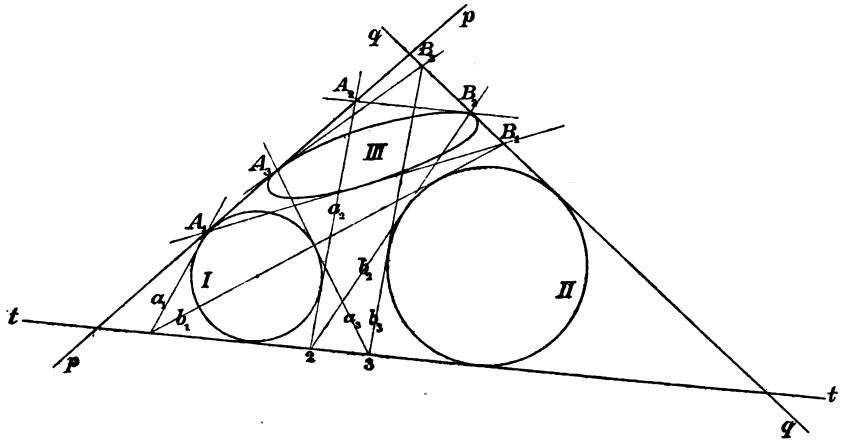


Sagt man statt kongruent projektivisch, so gilt dieselbe Schlußfolgerung. Sind demnach I und II beliebige Kegelschnitte, so ist auch III ein Kegelschnitt. Der darin liegende Satz ist leicht in Worten auszudrücken.

38) Der reciproke Satz wird folgendermaßen lauten:

Zieht man eine gemeinschaftliche Tangente t zweier Kegelschnitte I und II (z. B. Kreise) und von ihren Punkten aus eine Tangentenfolge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nach einer Tangente p von I, und von denselben Punkten aus eine

Fig. 33.



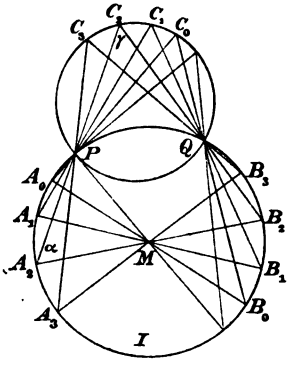
Tangentenfolge $b_1, b_2, b_3, \ldots$ nach einer Tangente q von II, was die Punktreihen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ und $B_1, B_2, B_3, \ldots$ giebt, so sind diese Punktreihen projektivische, und ihre Ver-

bindungslinien umhüllen einen Kegelschnitt, der von p und q und der zweiten gemeinschaftlichen Tangente berührt wird.

Bemerkung. Die Punktreihen p und t sind projektivische, die Punktreihen t und q ebenfalls, folglich auch die Punktreihen p und q.

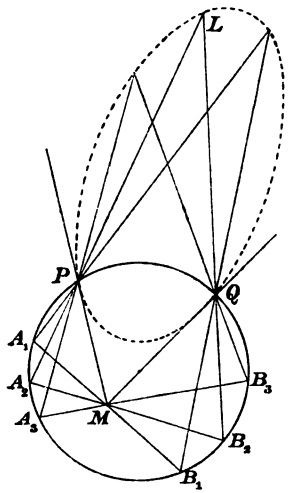
39) In Figur 34 ist ein Kreis I dargestellt, durch dessen Mittelpunkt M ein Büschel von Durchmessern gezogen ist. Sämtliche Endpunkte A und B sind mit zwei festen Punkten P bezw. Q des Kreises verbunden. Die gleichzahligen Strahlen geben Schnitte $C_1, C_2, C_3, \ldots$, die auf einem Kreise durch P und Q gehen, dessen in P und Q berührende Tangenten durch M gehen. Der elementare Beweis beruht in Folgendem: Weil je zwei Bogen A_1A_2 und B_1B_2 gleich groß sind, so sind auch die Peripheriewinkel A_1PA_2 und B_1QB_2 gleich. Es handelt sich also bei P und Q um kongruente Strahlenbüschel. Folglich müssen die C auf einem Kreise liegen.

Fig. 34.



Projiziert man nun central, z. B. so, daß Kreis I wieder in einen Kreis übergeht, der Punkt M aber excentrisch fällt, so werden aus den kongruenten Büscheln projektivische, und die Punkte C bilden einen Kegelschnitt durch P und Q, dessen in P und Q berührende Tangenten nach M gehen. (Man kann auch von den A nach Q und von den B nach P ziehen.)

Fig. 35.



Durch weitere Projektion ist man imstande, den Satz ganz allgemein auf Kegelschnitte auszudehnen.

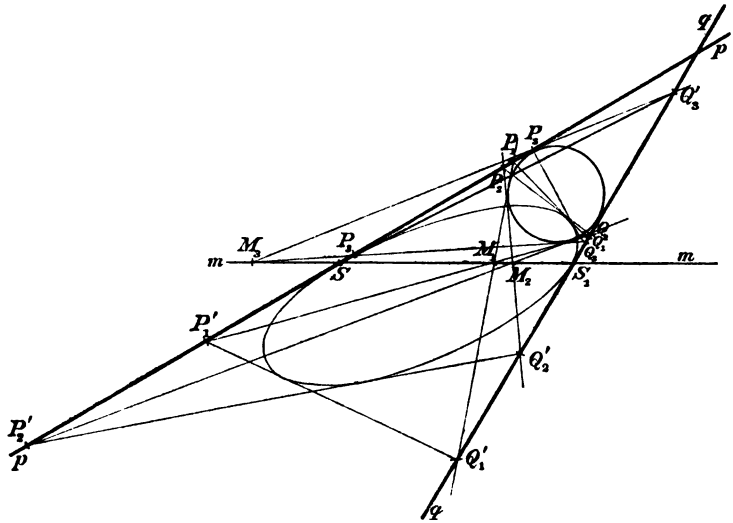
Daraus ergiebt sich z. B. folgende einfache Konstruktion eines Kegelschnitts aus zwei Tangenten PM und QM, den Berührungspunkten Q und M auf demselben und einem Punkte L.

Auflösung. Man ziehe LP, lege durch M eine Gerade MA_1 so, daß $\sphericalangle MA_1P = \sphericalangle PQL$ ist, und

ziehe LQ bis zum Schnitte B_1 mit A_1M. Dann läßt sich um PQB_1A_1 ein Kreis schlagen (Summe der Gegenwinkel des Vierecks $= 180^0$). An diesem Kreise wird die vorige Konstruktion vorgenommen.

40) Der reciproke Satz würde folgendermaßen lauten: Die Geraden p und q seien Tangenten eines gegebenen Kegelschnittes I, m eine beliebige Gerade. Von jedem Punkte M_n derselben seien Tan-

Fig. 36.



genten an den Kegelschnitt gezogen, die auf den Geraden p und q Punkte P_n, Q_n bezw. P'_n, Q'_n geben. Die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte umhüllen einen Kegelschnitt, der p und q in den Schnittpunkten mit m berührt.

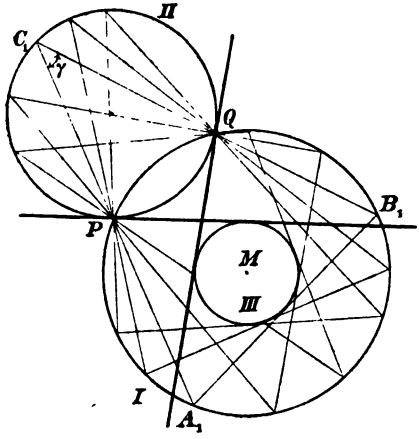
Daraus läßt sich eine Konstruktion des Kegelschnitts aus drei Tangenten und den Berührungspunkten auf zweien davon mit Hülfe eines Kreises ableiten, die zur vorigen Konstruktion reciprok ist.

41) In Figur 34 schnitten sich die Verbindungslinien der A und B sämtlich im Mittelpunkte M des einen Kreises. Dies liegt daran, daß die in P und Q berührenden Tangenten des andern durch M gehen, d. h. daß beide Kreise sich rechtwinklig schneiden.

Es giebt einen allgemeineren Fall. In Figur 37 sind zwei Kreise I und II gezeichnet, die sich in P und Q auf beliebige Art schneiden. Zieht man von jedem Punkte C_n des Kreises II aus

Strahlen nach P und Q, welche den Kreis I in A_n und B_n schneiden, so umhüllen, wie leicht zu zeigen ist, die Verbindungslinien $A_n B_n$ einen concentrischen Kreis, der von den in P und Q gezogenen Tangenten berührt wird.

Fig. 37.



Durch Projektion erkennt man, daß dieselbe Operation bei Kegelschnitten, die sich in P und Q schneiden, auf die Umhüllung eines Kegelschnitts führt, der von den in P und Q gezogenen Tangenten berührt wird. Auf diesen Tangenten befinden sich also projektivische Punktreihen.

Beispiele dieser Art lassen sich beliebig viele geben. Aus jedem ergiebt sich eine Methode zur mechanischen Herstellung von Kegelschnitten.

VII. Übungen aus der analytischen Geometrie.

42) Da bezüglich der Kegelschnitte die synthetische Geometrie der analytischen im allgemeinen überlegen ist, weil die Kegelschnitte als rein projektivische Gebilde von den Maßbeziehungen der Koordinatensysteme unabhängig sind, so sollen hier nur einige Übungen aus der Koordinatenlehre angestellt werden, die auf den Begriff des Krümmungskreises hinleiten, ein Gegenstand, der synthetisch weniger bequem behandelt werden kann.

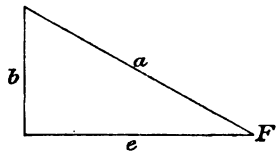
[Dabei sei bemerkt, daß für die Untersuchung von Kurven höherer Gerade die analytische Geometrie den Vorzug hat, mit Hülfe der Infinitesimalrechnung auch bedeutendere Schwierigkeiten zu überwinden, daß sie also durchaus nicht vernachlässigt werden darf.]

a) Berechnung der wichtigeren Linien an der Ellipse.

43) Für die Ellipse sei, wie früher, $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ die Brennweite. Der Ausdruck $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$ werde gleich ε^2 gesetzt, so daß

$\varepsilon = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2} = \frac{e}{a}$ ist. Man bezeichnet diesen Ausdruck als die numerische Excentricität der Ellipse. Sie bedeutet den Cosinus des Winkels zwischen a und e in dem aus a, b und e gebildeten Dreiecke, oder den Sinus des Winkels zwischen a und b.

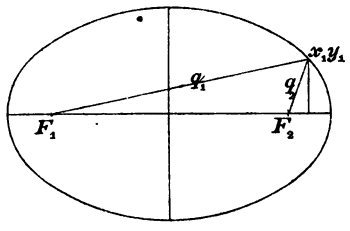
Fig. 38.



Aufgabe. Die Brennstrahlen q_1 und q_2 für einen Punkt $x_1 y_1$ der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ aus x_1 und ε zu berechnen.

Auflösung. $q_1^2 = (x_1 + e)^2 + y_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + e^2 + 2x_1 e$
$= x_1^2 + (b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_1^2) + (a^2 - b^2) + 2x_1\sqrt{a^2 - b^2}$. (Hier ist y_1^2 aus $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ berechnet worden.) Also

Fig. 39.



$$q_1^2 = x_1^2\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) + b^2 + a^2 - b^2 + 2\frac{a x_1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$$
$$= x_1^2\varepsilon^2 + a^2 + 2a\varepsilon x_1 = (\varepsilon x_1 + a)^2.$$

Ebenso ist $q_2^2 = (x_1 - e)^2 + y_1^2 = (\varepsilon x_1 - a)^2$, also:

$$q_1 = (a + \varepsilon x_1); \quad q_2 = (a - \varepsilon x_1);$$

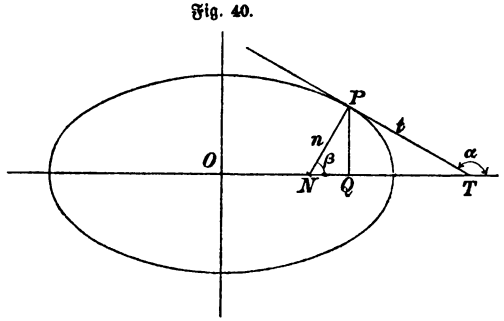
also auch

$$q_1 \cdot q_2 = a^2 - \varepsilon^2 x_1^2, \quad q_1 + q_2 = 2a, \quad q_1 - q_2 = 2\varepsilon x_1.$$

44) **Aufgabe.** Für einen Ellipsenpunkt P die Gleichung der Normale zu finden.

Auflösung. Nach Teil II (Kegelschnitte Nr. 39) war die Gleichung der Tangente in P, wenn x_1 und y_1 die Koordinaten waren,

Fig. 40.



1) $\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1$,

oder

$$y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x + \frac{b^2}{y_1} = Ax + B.$$

Also ist die Richtungskonstante für die Tangente

2) $$\tan\alpha = A = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}.$$

Die Normale hat also eine Neigung β, die sich bestimmt aus

3) $$\tan\beta = -\frac{1}{A} = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1},$$

und da sie durch den Punkt $x_1 y_1$ gehen soll, ist ihre Gleichung

4) $$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$$

oder

5) $$a^2 y_1 x - b^2 x_1 y = (a^2 - b^2)\, x_1 y_1.$$

Bemerkungen. In Fig. 40 nennt man $PN = n$ die Länge der Normale, oder kurz die Normale, $PT = t$ die Länge der Tangente oder kurz die Tangente. Die Projektion NQ der Normale heißt Subnormale oder p_n, die Projektion QT der Tangente heißt Subtangente oder p_t. Die Brennpunkt-Ordinate der Ellipse, d. h. ihre Höhe an den Brennpunktstellen, heißt halber Parameter, oder p.

45) **Aufgabe.** Wo schneiden die Tangente und die Normale, die zu einem Ellipsenpunkte $x_1 y_1$ gehören, die X-Achse, und wie groß sind die soeben erklärten Stücke?

a) Tangentenschnitt T: Setzt man in Gleichung 1) $y = 0$, so wird

$$x = \frac{a^2}{x_1} = OT.$$

b) Normalenschnitt N: Setzt man in Gleichung 5) $y = 0$, so wird

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x_1 = \varepsilon^2 x_1 = ON.$$

c) Länge n der Normale:

$$n^2 = (x_1 - ON)^2 + y_1^2 = (x_1 - \varepsilon^2 x_1)^2 + (b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_1^2)$$

$$= x_1^2\left[(1-\varepsilon^2)^2 - \frac{b^2}{a^2}\right] + b^2 = x_1^2\left[\left(1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\right)^2 - \frac{b^2}{a^2}\right] + b^2$$

$$= x_1^2\left[\frac{b^4}{a^4} - \frac{b^2}{a^2}\right] + b^2 = \frac{b^2}{a^2}\left[x_1^2\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) + a^2\right],$$

also

$$n^2 = \frac{b^2}{a^2}[a^2 - \varepsilon^2 x_1^2] \quad \text{und} \quad n = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x_1^2} = \frac{b}{a}\sqrt{q_1 q_2}.$$

d) Länge t der Tangente:

$$t^2 = \sqrt{(OT - x_1)^2 + y_1^2} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{x_1} - x_1\right)^2 + y_1^2} \quad \text{u. s. w.}$$

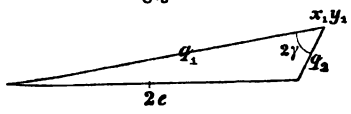
e) Ordinate p im Brennpunkte: Aus $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$ folgt für $x = e$

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}(a^2 - b^2) = \frac{b^4}{a^2}, \quad \text{also} \quad p = \frac{b^2}{a}.$$

Durch Einsetzung des Halbparameters p wird die Scheitelgleichung der Ellipse auf die Form $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$ gebracht. (Vergl. Teil II, Kegelschnitte Nr. 40.)

46) **Aufgabe.** Für den Punkt $x_1 y_1$ der Ellipse den Winkel 2γ zwischen den Brennstrahlen oder den Winkel γ zwischen Brennstrahl und Normale zu berechnen.

Fig. 41.



Auflösung. In Figur 41 ist $4e^2 = q_1^2 + q_2^2 - 2q_1 q_2 \cos 2\gamma$, folglich

$$\cos 2\gamma = \frac{q_1^2 + q_2^2 - 4e^2}{2q_1 q_2}.$$

Logarithmisch besser ist aber die Formel für den Cosinus des halben Winkels (vergl. trigonometrische Formeltabelle in Teil II):

$$\cos^2\gamma = \frac{(q_1 + q_2 + 2e)(q_1 + q_2 - 2e)}{4q_1 q_2},$$

also, da $q_1 + q_2 = 2a$ ist,

$$\cos^2\gamma = \frac{(2a + 2e)(2a - 2e)}{4q_1 q_2} = \frac{a^2 - e^2}{q_1 q_2} = \frac{b^2}{q_1 q_2};$$

$$\cos\gamma = \frac{b}{\sqrt{q_1 q_2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x_1^2}}.$$

Folgerung. Aus $n = \frac{b}{a}\sqrt{q_1 q_2}$ und $\cos\gamma = \frac{b}{\sqrt{q_1 q_2}}$ folgt

$$n\cos\gamma = \frac{b^2}{a} = p.$$

Folglich: Die Projektion der Normale n auf jeden der zugehörigen Brennstrahlen giebt den Halbparameter p.

Jetzt folgen einige Aufgaben, die auf den Krümmungsradius führen.

47) **Aufgabe.** Zwei benachbarte Punkte der Ellipse mögen die Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 haben. Wo schneidet ihre Verbindungslinie die X-Achse und wo schneiden sich die zu beiden Punkten gehörigen Normalen?

Auflösung. a) Schnitt der Tangente mit der Achse: Die Gleichung der Verbindungslinien läßt sich schreiben

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}.$$

Setzt man $y = 0$, so folgt für den Schnitt die Entfernung

$$s = OT = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_1 - y_2}.$$

b) Schnitt der Normalen: Ihre Gleichungen sind nach Obigem

$$a^2 y_1 x - b^2 x_1 y = (a^2 - b^2) x_1 y_1,$$
$$a^2 y_2 x - b^2 x_2 y = (a^2 - b^2) x_2 y_2.$$

Multipliziert man die obere Gleichung mit x_2, die untere mit x_1, so fällt durch beiderseitige Subtraktion y weg, und die Abscisse des Durchschnittspunktes wird

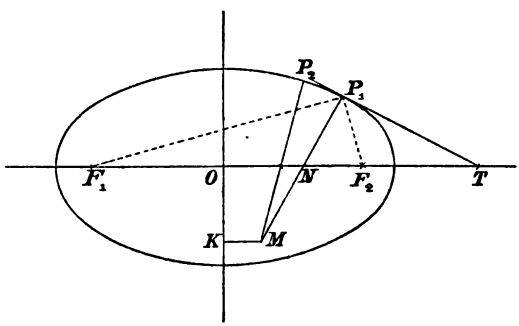
$$x = x_1 x_2 \frac{y_1 - y_2}{x_2 y_1 - x_1 y_2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

oder, wenn man wieder die Bezeichnungen ε und s einführt: Der Abstand des Schnittpunktes der Normalen von der Y-Achse ist also

$$KM = x = \frac{\varepsilon^2}{s} x_1 x_2.$$

48) **Aufgabe.** Es soll untersucht werden, wie groß der Abstand KM des berechneten Schnittpunktes von der Y-Achse wird, wenn P_2 unendlich nahe an P_1 rückt.

Fig. 42.



Auflösung. Es war

$$KM = \frac{\varepsilon^2 \cdot x_1 x_2}{s}.$$

Setzt man $x_1 = x_2$, so wird $x_1 x_2 = x_1^2$. Der obige Ausdruck

$$s = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_1 - y_2}$$

wird aber

$\frac{x_1 y_1 - x_1 y_1}{y_1 - y_1}$, also von der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$. (Nicht etwa $x_1 \frac{y_1 - y_1}{y_1 - y_1} = x_1$ zu setzen!) Rückt aber P_2 unendlich nahe an P_1,

so geht die Verbindungslinie P_2P_1 in die Tangente über, und die Tangente in P_1 schneidet nach Aufgabe 45 a in der Entfernung $s = \frac{a^2}{x_1}$. Setzt man diesen brauchbaren Wert ein, so entsteht

6) $$KM = \frac{\varepsilon^2 x_1^2}{\left(\frac{a^2}{x_1}\right)} = \frac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2}.$$

Nun war aber nach Aufgabe 45 $ON = \varepsilon^2 x_1$, also ist

6*) $$KM = \frac{x_1^2}{a^2} ON.$$

Dieser Ausdruck ist leicht zu konstruieren. Schreibt man nämlich

$$KM = \frac{\left(\frac{x_1}{a} ON\right) x_1}{a} = \frac{z \cdot x_1}{a},$$

so ist die Hülfsgröße $z = \frac{x_1}{a} ON$ aus der Proportion

$$x_1 : a = z : ON$$

als vierte Proportionale zu konstruieren, sodann $KM = \frac{z \cdot x_1}{a}$ als vierte Proportionale aus der Proportion

$$a : x_1 = z : KM.$$

Bemerkung. Halbierung des Brennstrahlwinkels giebt die genaue Richtung der Normale. Zieht man eine Parallele zur Y-Achse in dem konstruierten Abstande KM, so findet man den Punkt M. Dieser Punkt ist von außerordentlicher Bedeutung als Krümmungsmittelpunkt der Kurve für die Stelle $x_1 y_1$.

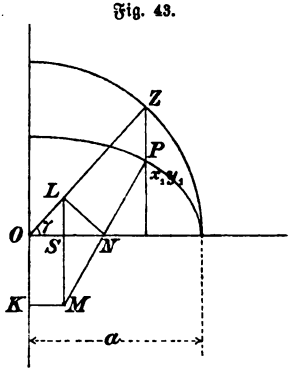
Vorläufig genüge neben der soeben gezeigten Konstruktion die in Folgendem erläuterte.

In Figur 43 ist neben der Ellipse der mit der Halbachse a um O geschlagene Kreis gezeichnet und der Punkt Z desselben markiert, der senkrecht über P liegt. Für diesen Punkt ist $\frac{x_1}{a} = \cos\gamma$. Folglich ist jetzt

$$KM = \frac{x_1^2}{a^2} \cdot ON = ON \cos^2\gamma$$
$$= [ON \cos\gamma] \cdot \cos\gamma,$$

so daß es sich um eine zweimalige Projektion von ON mit Hülfe des Winkels γ handelt.

Fig. 43.



In der Figur ist NL das Lot auf OZ, also $OL = ON \cdot \cos\gamma$. Ferner ist

$$LS \perp ON, \quad \text{folglich} \quad OS = OL\cos\gamma = ON\cos^2\gamma = KM.$$

Die vorläufige Konstruktion für den Krümmungsmittelpunkt der Ellipse im Punkte $x_1 y_1$ ist also folgende:

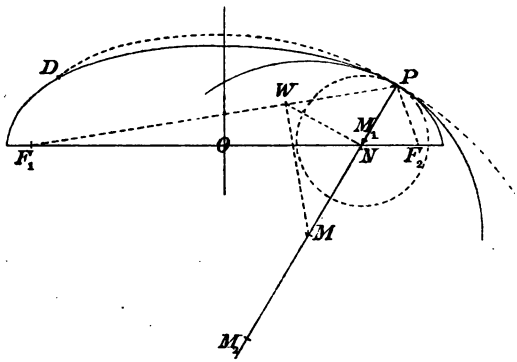
Durch Halbierung des Brennstrahlwinkels bei P findet man die Normale PN. Die Senkrechte durch P giebt den Hülfskreispunkt Z. Das Lot von N auf OZ giebt den Punkt L; die Senkrechte durch L schneidet die Normale im Krümmungsmittelpunkte M.

Schlägt man um M mit MP einen Kreis, so fällt dieser Kreis für eine weit größere Strecke mit der Ellipse zusammen, als jeder andere. Er heißt der Krümmungskreis der Ellipse für die Stelle P.

b) Krümmungsradius der Ellipse.

49) Benachbarte Radien eines Kreises schneiden sich im Mittelpunkte. Die Normale im Punkte P der Ellipse wird von den Normalen der Nachbarpunkte in verschiedenen Punkten geschnitten. Rücken die Nachbarpunkte unendlich nahe an P, so rückt der Schnittpunkt in das vorher konstruierte M, womit der kleinste Grenzwert für die Entfernung des Schnittes von P gefunden wird.

Fig. 44.



Nimmt man einen kleineren Berührungskreis der Stelle P, z. B. den Kreis M_1, so ist seine Krümmung zu groß. Er tritt beiderseits ins Innere der Ellipse und hat sonst keinen Punkt mit ihr gemein.

Nimmt man einen zu großen Berührungskreis, z. B. den Kreis M_2, so tritt er beiderseits aus der Ellipse heraus. Er schneidet sie entweder nicht mehr, oder er schneidet sie noch in zwei getrennten Punkten D und E, oder er berührt sie noch einmal (d. h. er trifft sie in zwei zusammenfallenden Punkten D und E).

Zwischen beiden Kreisen liegt nun der Krümmungskreis, dessen Krümmung weder zu groß, noch zu klein ist. Er verhält sich in ganz

anderer Weise. Weil die Krümmung der Ellipse von P aus nach links abnimmt, tritt der gezeichnete Krümmungskreis nach links in die Ellipse hinein. Weil die Krümmung von P aus nach rechts zunimmt, so tritt der gezeichnete Krümmungskreis nach rechts aus der Ellipse heraus. Es tritt also der merkwürdige Fall ein, daß der Krümmungskreis in P sowohl schneidet als auch berührt.

Dieses scheinbare Paradoxon klärt sich auf, wenn man den Krümmungsradius allmählich von M_2P auf MP abnehmen läßt. Anfangs hat man dann die Berührung in P (zwei Schnittpunkte bedeutend) und die Schnittpunkte D und E. Beim Kleinerwerden des Krümmungsradius rückt D an P heran und fällt schließlich mit P zusammen. Jetzt hat der Krümmungsradius mit der Kurve in P drei zusammenfallende Punkte gemein, und nur ein einziger abgetrennter Schnittpunkt E bleibt übrig, was bei keinem andern der Berührungskreise der Fall ist.

Für die Endpunkte der Hauptachsen ist die Betrachtung etwas zu verändern. Es zeigt sich, daß der Krümmungsmittelpunkt dort sogar vier Punkte mit der Kurve gemein hat, da nicht nur D, sondern der Symmetrie halber auch E mit P zusammenfällt.

50) **Aufgabe.** Den Krümmungsmittelpunkt für die Stelle P zu berechnen.

Auflösung. Seine Koordinaten seien x und y, die von P seien x_1 und y_1, dann ist nach Pythagoras

a) $$\varrho^2 = \overline{MP}^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2.$$

Nun war die Gleichung der Normale (Aufgabe 44, Gleichung 5)

$$b^2 x_1 y = a^2 y_1 x - (a^2 - b^2) x_1 y_1.$$

Setzt man hier $x = KM = \frac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2}$ (nach Gleichung 6 in Aufgabe 48) ein, so erhält man als Gleichung zur Berechnung der Ordinate des Punktes M

$$b^2 x_1 y = a^2 y_1 \cdot \frac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2} - (a^2 - b^2) x_1 y_1,$$

also ist (vgl. Fig. 43)

$$SM = y = \frac{\varepsilon^2 x_1^2 y_1}{b^2} - \frac{(a^2 - b^2) y_1}{b^2} = \frac{\varepsilon^2 y_1}{b^2}(a^2 - x_1^2).$$

Nach der Ellipsengleichung ist aber $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$, also $x_1^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2} y_1^2$. Dies, in die vorige Gleichung eingesetzt, giebt

$$y = -\frac{\varepsilon^2 y_1}{b^2} \frac{a^2}{b^2} y_1^2 = -\frac{\varepsilon^2 a^2 y_1^3}{b^4} = SM.$$

Setzt man in Gleichung a) die Werte $x = \frac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2}$ und $y = -\frac{\varepsilon^2 a^2 y_1^3}{b^4}$ ein, so erhält man eine Gleichung zur Berechnung von ϱ^2. In dieser setze man $b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_1^2$ für y_1^2, und so ergiebt sich

$$\varrho^2 = \frac{(a^2 - \varepsilon^2 x_1^2)^3}{a^2 b^2} = \frac{(q_1 q_2)^3}{a^2 b^2}.$$

Nun war aber $q_1 q_2 \frac{b^2}{a^2} = n^2$, also $q_1 q_2 = \frac{a^2 n^2}{b^2}$. Einsetzung giebt

$$\varrho^2 = \frac{n^6 a^4}{b^6} \text{ und } \varrho = \frac{n^3 a^2}{b^4}$$

oder, da $\frac{b^2}{a} = p$ war:

b) $$\varrho = \frac{n^3}{p^2}.$$

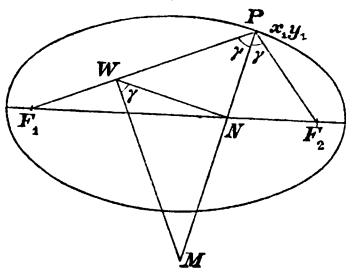
Da außerdem $p = n \cos \gamma$ war, so folgt noch

c) $$\varrho = \frac{n}{\cos^2 \gamma}.$$

Demnach muß sich ϱ mit Hülfe zweier rechtwinkligen Dreiecke einfach konstruieren lassen.

51) **Aufgabe.** Für den Punkt $x_1 y_1$ der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ den Krümmungsmittelpunkt zu konstruieren.

Fig. 45.



Auflösung. Halbiere den Winkel der Brennstrahlen, errichte auf der Normalen im Schnittpunkte N (der Normale und X-Achse) ein Lot NW bis zu dem einen der Brennstrahlen, errichte in W auf dem Brennstrahl ein Lot bis zum Schnitte M mit der Normale, dann ist M der Krümmungsmittelpunkt.

Denn $PW = \frac{n}{\cos \gamma}$, folglich $MP = \frac{PW}{\cos \gamma} = \frac{n}{\cos^2 \gamma} = \varrho$.

Für den höchsten Punkt P_1 ist $\sphericalangle \gamma = \sphericalangle FP_1O$, folglich fällt W mit F_1 zusammen, und das Lot WM auf WP_1 giebt den Krümmungsmittelpunkt M. In diesem Falle ist

$$\varrho = \frac{b}{\cos^2 \gamma} = \frac{b}{\left(\frac{b^2}{a^2}\right)} = \frac{a^2}{b}.$$

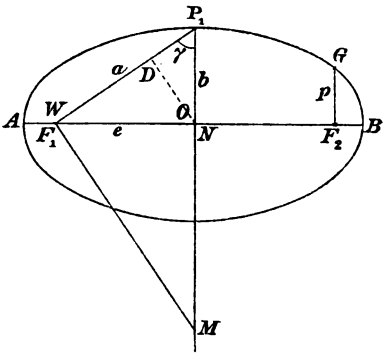
Für den Endpunkt B der langen Achse ist $\gamma = 0$, also

$$\varrho_1 = \frac{p}{\cos^2 0} = \frac{p}{1} = p = \frac{b^2}{a},$$

d. h. gleich dem Lote F_2G im Brennpunkte. Sind nur a und b gegeben, so findet man ϱ_1 bequem als Projektion DP_1 von b auf F_1P_1, denn

$$DP_1 = b\cos\gamma = b\frac{b}{a} = \frac{b^2}{a} = \varrho_1.$$

Fig. 46.



Diese beiden besonderen Radien werden häufig zur angenäherten Verzeichnung der Ellipse benutzt.

c) Krümmungsradius der Parabel und Hyperbel.

52) **Aufgabe.** Den Krümmungsmittelpunkt für einen Punkt der Parabel zu konstruieren.

Auflösung. Man halbiere den Winkel zwischen dem Brennstrahl PF und der Parallelen zur Achse. Dies giebt die Normale PN. Lot auf PN in N giebt Schnittpunkt W mit dem Brennstrahle. Lot auf PW in W giebt M auf der Normale. (Ebenso könnte W_1 benutzt werden.)

Der Krümmungsradius für den Scheitel ist wieder $p = FG = 2AF$.

Fig. 47.

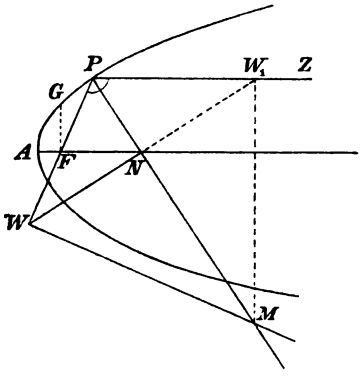
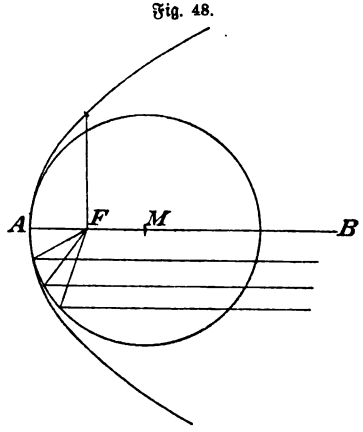


Fig. 48.

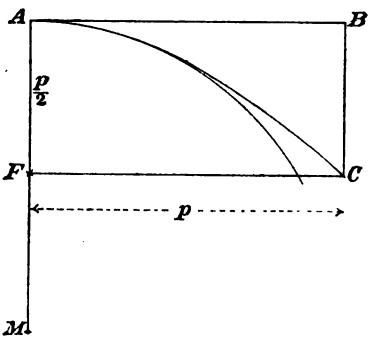


53) **Anwendung.** Statt des paraboloischen Hohlspiegels wird häufig der sphärische Hohlspiegel genommen, der in der Nähe des

Scheitels A mit dem paraboliſchen übereinſtimmt. Daher werden Strahlen, die in der Nähe von AB parallel zu AB einfallen, faſt genau nach dem Halbierungspunkte von AM, d. h. nach F, zurückgeworfen. Man darf daher dieſen Punkt auch bei dem ſphäriſchen Hohlſpiegel als Brennpunkt betrachten. (Die genaue Konſtruktion der zurückgeworfenen Strahlen giebt eine Umhüllungskurve, die ſogenannte Katakauſtik, deren Spitze mit F zuſammenfällt.)

54) **Anwendung.** Ein Stein werde mit Geſchwindigkeit v horizontal weggeſchleudert. Wo liegt der Brennpunkt F der Parabel, die er beſchreibt?

Fig. 49.



Auflöſung. Iſt $FA = \frac{1}{2}FC$, ſo iſt FC der Halbparameter p und $FA = \frac{p}{2}$. Nach welcher Zeit wird alſo C erreicht?

Es iſt $AB = v \cdot t$, $BC = \frac{1}{2}gt^2$, alſo $\frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}vt$ und daher $t_1 = \frac{v}{g}$. Folglich $BC = AF = \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2}g \cdot \frac{v^2}{g^2} = \frac{v^2}{2g}$. Dies iſt die Tiefe des Brennpunktes unter A. Der Krümmungsmittelpunkt liegt doppelt ſo tief, ſo daß $AM = \frac{v^2}{g}$ und $g = \frac{v^2}{AM}$ iſt.

Folgerung für die Centrifugalkraft und Centripetalkraft. Soll ſich ein Körper von A aus auf einem Kreiſe mit Radius r um einen Punkt F bewegen, ſo muß die an Stelle der Fallbeſchleunigung tretende Centripetalbeſchleunigung nach Obigem ſein $g_1 = \frac{v^2}{AM} = \frac{v^2}{r}$, alſo iſt die nötige Centripetalkraft $mg_1 = \frac{mv^2}{r}$. (Ebenſo groß iſt bei der Kreisbewegung die Centrifugalkraft.) In dem unendlich kleinen Zeitraume nämlich, für den die Kraft zu berechnen iſt, dürfen Kreis und Parabel als identiſch angeſehen werden, ſo daß das gefundene Reſultat den abſolut genauen Grenzwert giebt. Mit obiger Zeichnung iſt auch die Wurfbahn für das Maximum der Wurfweite erledigt.

55) **Aufgabe.** Den Krümmungsradius der Hyperbel zu berechnen. Die Auflöſung geſchieht durch entſprechende Berechnungen, wie bei der Ellipſe. Die Brennſtrahlen werden $q_1 = \varepsilon x + a$ und

$q_2 = \varepsilon x - a$, wo $\varepsilon = \frac{\xi}{a}$ und $\xi = \sqrt{a^2 + b^2} = e$ ist $(q_1 - q_2 = 2a)$. Die Normale wird bestimmt aus $n^2 = \frac{b^2}{a^2}(\varepsilon^2 x_1^2 - a^2) = \frac{b^2}{a^2} q_1 q_2$, der Krümmungsradius aus $\varrho^2 = \frac{(\varepsilon^2 x_1^2 - a^2)^3}{a^2 b^2} = \left(\frac{n^3}{p^2}\right)^2$ als $\varrho = \frac{n^3}{p^2}$.

Die für Ellipse und Parabel angegebenen Konstruktionen gelten daher auch hier.

d) Andeutungen über die allgemeine Form der Gleichung zweiten Grades.

56) Die allgemeine Form ist

1) $$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

oder

$$y^2 + 2y\frac{bx + e}{c} = -\frac{ax^2 + 2dx + f}{c},$$

so daß

$$y = -\frac{bx + e}{c} \pm \frac{1}{c}\sqrt{(bx + e)^2 - (ax^2 + 2dx + f)c},$$

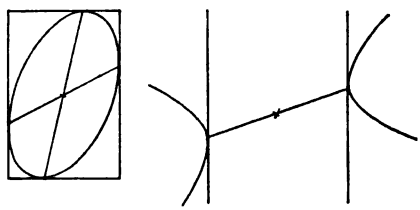
oder

2) $$y = -\frac{bx + e}{c} \pm \frac{1}{c}\sqrt{x^2(b^2 - ac) + 2x(be - dc) + (e^2 - fc)}.$$

Ganz ebenso wird x berechnet.

Der Nachweis, daß die Gleichung stets einen Kegelschnitt darstellt, ist etwas langwierig. Eine Andeutung über den einzuschlagenden Gang möge hier genügen. Der Ausdruck unter der Wurzel wird im allgemeinen für zwei Werte (von x) gleich Null. Ausnahmefälle mögen vorläufig unbeachtet bleiben. An diesen Stellen findet man nach Teil II (Anhang) entweder ein Maximum oder ein Minimum (worüber durch Einsetzen von Nachbarwerten entschieden werden kann). Das Entsprechende gilt für das aus Gleichung 1) berechnete x.

Fig. 50.



Man verbinde zwei zusammengehörige Minimal- bezw. Maximalpunkte und verschiebe den Anfang des Koordinatensystems nach dem Halbierungspunkte dieser Strecke. An der Form der neuen Gleichung erkennt man stets, daß jede durch den neuen Koordinatenanfang gelegte Sehne

halbiert ist, wenn sie die Kurve überhaupt trifft. — Man hat also den Mittelpunkt der Kurve nachgewiesen.

Jetzt suche man (gegebenenfalls auch mit Hülfe von Polarkoordinaten) die kleinsten Entfernungen vom Mittelpunkte. In die entsprechende Richtung dreht man die Y-Achse eines neuen Koordinatensystems. Jetzt läßt sich die Gleichung stets auf die Form $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ bringen, stellt also eine Ellipse oder Hyperbel dar.

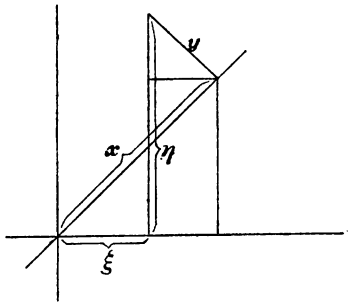
Wird aber der Ausdruck unter der Wurzel nur für einen einzigen endlichen Wert gleich Null, so kann es sich im allgemeinen nur um eine Parabel handeln. Mit Hülfe der Halbierungspunkte paralleler Sehnen erhält man die Achsenrichtung, den Scheitel und die Scheitelgleichung.

Läßt sich die Gleichung in ein Produkt von der Form

$$(ax + by + c)(a_1 x + b_1 y + c_1) = 0$$

zerlegen, so stellt sie zwei gerade Linien dar, deren Gleichungen in der letzten enthalten sind.

Fig. 51.



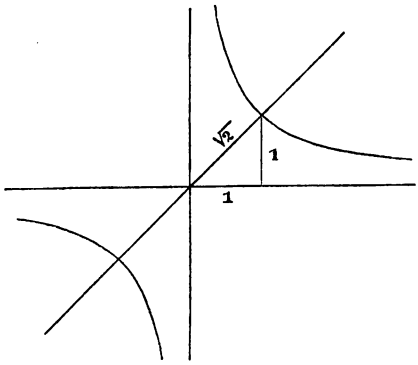
Verschiebungen des Koordinatensystems kamen schon in Teil II zur Sprache. Um auch einen Begriff von der Drehung des Koordinatensystems zu erhalten, drehe man beispielsweise das Koordinatensystem um 45^0.

Zwischen den Koordinaten ξ, η und x, y bestehen dann die Beziehungen

$$\eta = x\sqrt{\tfrac{1}{2}} + y\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

$$\xi = x\sqrt{\tfrac{1}{2}} - y\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Fig. 52.



So geht z. B. die Gleichung der „Mariotteschen Kurve" $\eta = \frac{1}{\xi}$ (vgl. Teil II, Geom. Nr. 105) über in

$$x\sqrt{\tfrac{1}{2}} + y\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{1}{x\sqrt{\tfrac{1}{2}} - y\sqrt{\tfrac{1}{2}}},$$

oder in

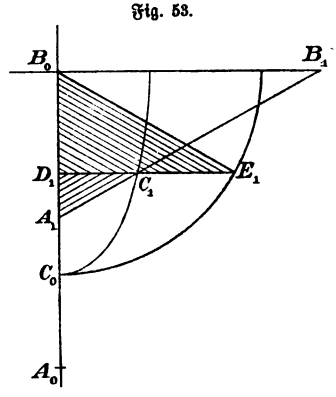
$$\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1,$$

so daß es sich um die Gleichung einer Hyperbel mit den Halbachsen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$ handelt, d. h. um eine gleichseitige Hyperbel.

e) Der Ellipsenzirkel oder das Ovalwerk des Leonardo da Vinci.

57) **Aufgabe.** Die Endpunkte einer gegebenen Geraden AB werden gezwungen, sich in zwei aufeinander senkrechten Geraden zu bewegen. Was für einen Weg legt jeder Punkt der Geraden und ihrer Verlängerung zurück?

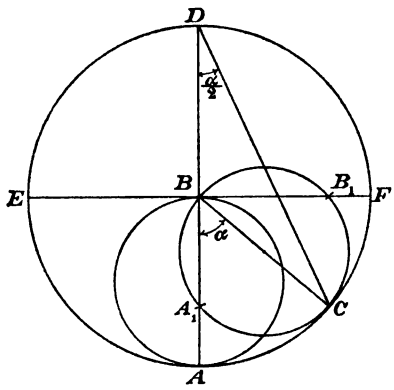
Fig. 53.



Auflösung.*) A_0B_0 sei die Gerade, C_0 der zu untersuchende Punkt der Geraden. $A_1C_1B_1$ sei eine zweite Lage.

Man schlage mit B_0C_0 einen Kreis und lege durch C_1 die Gerade $D_1E_1 \perp A_0B_0$. Dann ist $C_1B_1 = B_0E_1$, folglich $\sphericalangle B_1C_1E_1 = \sphericalangle B_0E_1C_1$, folglich $\triangle A_1D_1C_1 \sim B_0D_1E_1$, folglich $D_1C_1 : D_1E_1 = A_1C_1 : E_1B_0 = A_0C_0 : C_0B_0$. Letzteres ist aber das konstante Teilungsverhältnis der bewegten Geraden. In jeder Lage wird also die horizontale Sehne des Hülfskreises in diesem konstanten Verhältnis geteilt, d. h. der Weg von C ist eine Ellipse mit den Halbachsen a und b, wo a und b die Teile der Geraden sind. Der Halbierungspunkt bewegt sich auf einem Kreise.

Fig. 54.



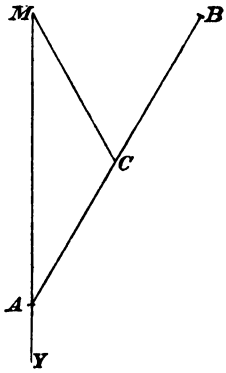
Ganz entsprechend wird der Beweis für Punkte auf der Verlängerung der Geraden geführt.

Bemerkung. In einem Kreise befinde sich ein Berührungskreis von halb so großem Radius in zwei verschiedenen Lagen. Der Berührungspunkt werde jedesmal

*) Der Schüler versuche die Aufgabe auch mit Hülfe der Koordinaten zu lösen.

mit dem Centrum B verbunden. Schneidet AB den zweiten Kreis in A, so ist Bogen $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{A_1C}$, denn zum Peripheriewinkel $\frac{\alpha}{2}$ im großen Kreise gehört derselbe Bogen, wie zum Peripheriewinkel α im kleinen Kreise. Rollt also der kleine Kreis im großen, ohne zu gleiten (so daß also der Weg $\overset{\frown}{AC}$ stets gleich dem abgewickelten Bogen $\overset{\frown}{A_1C}$ ist), so bewegt sich der Punkt A auf dem Durchmesser AD und ebenso B auf dem Durchmesser EF. Für A und B ist also der Bewegungszwang derselbe, wie in der vorigen Aufgabe. Jeder Punkt des Durchmessers AB bewegt sich also auf einer Ellipse, nur der Mittelpunkt auf einem Kreise und die Endpunkte auf Geraden. Demnach ist noch ein dritter Mechanismus möglich, der Ellipsen hervorbringt.

Fig. 55.

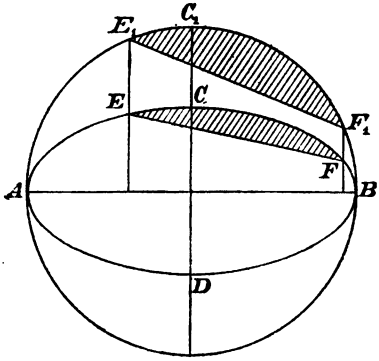


Es sei $MC = AC = BC$; MC sei drehbar um M, C sei ein Gelenk, A werde gezwungen, sich in der Geraden MY zu bewegen, dann bewegt sich B geradlinig, denn stets ist $\sphericalangle AMB = 90^0$. Jeder Punkt der Geraden AB bewegt sich in einer Ellipse.

Der erste Mechanismus heißt Ellipsenzirkel, der zweite Planetenrad, der dritte Ellipsenlenker. Bekannt sind sie auch unter dem Namen Ovalwerk.

f) Flächenberechnungen an den Kegelschnitten.

Fig. 56.



58) Berechnung von Ellipsensegmenten.

Soll das Ellipsensegment EFC berechnet werden, so bilde man das zugehörige Kreissegment und berechne dieses. Ist F seine Fläche, so ist die des Ellipsensegments nach dem Satze über die gesetzmäßige Verkürzung der Lote und senkrechten Flächenstreifen

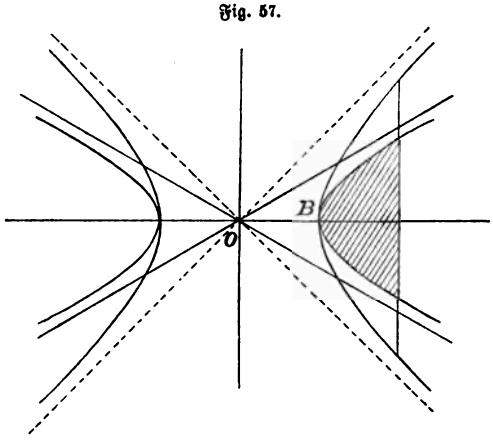
$$F_1 = F \cdot \frac{b}{a}.$$

59) Berechnung von Hyperbelsegmenten.

Die Hyperbel ist leicht auf eine gleichseitige zu reducieren. Dann findet Entsprechendes, wie vorher bei Ellipse und Kreis statt. Es wird

$$F_1 = F\frac{b}{a}.$$

Fig. 57.



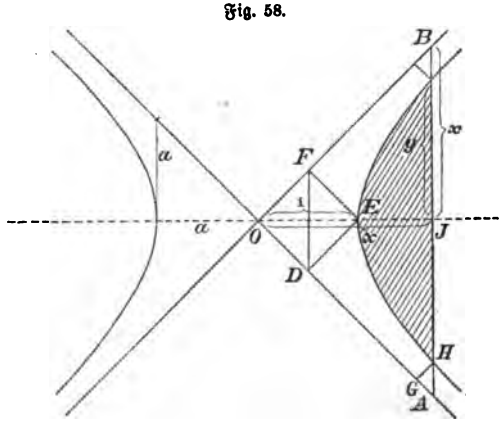
Demnach ist es nur nötig, die Segmentberechnung an der gleichseitigen Hyperbel zu üben.

Unten, in der algebraischen Analysis, wird gezeigt, daß dabei der natürliche Logarithmus gebraucht wird. Nach Durchnahme des betreffenden Abschnitts kann folgendes Beispiel gelöst werden:

60) **Aufgabe.** Das symmetrische Segment der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ zu berechnen, welches zum Abstande $OJ = x$ gehört.

Auflösung. 1) Segment $= \triangle OAB - [\square ODEF + 2 \cdot DGHE + 2 \triangle GAH]$.

Fig. 58.



$OJ = JB = x$,

also

2) $\triangle OAB = 2x \cdot \frac{x}{2} = x^2$.

$OE = 1$,

folglich

3) $\square ODEF = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

Dies ist der Inhalt des konstanten Rechtecks.

Diagrammfläche $DGHE = \overline{OD}^2 \cdot {}^e\lg\frac{OG}{OD} = \frac{1}{2}\,{}^e\lg\frac{OG}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\,{}^e\lg(OG\sqrt{2})$.

Es ist aber

$$OG \cdot GH = \square\, ODEF = \tfrac{1}{2},$$

folglich

$$OG = \frac{1}{2\,GH} = \frac{1}{2AH \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{AH \cdot \sqrt{2}}.$$

Da aber $AH = x - y$, und $x^2 - y^2 = 1$ ist, so folgt

$$AH = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

Demnach ist

$$OG = \frac{1}{\sqrt{2}\,(x - \sqrt{x^2 - 1})},$$

und daher

$$\text{Fläche } DGHE = \tfrac{1}{2}\,{}^{e}\lg\left[\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}\,(x - \sqrt{x^2 - 1})}\right] = \tfrac{1}{2}\,{}^{e}\lg\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - (x^2 - 1)}$$
$$= x + \sqrt{x^2 - 1},$$

also folgt:

4) $$\text{Fläche } DGHE = \tfrac{1}{2}\,{}^{e}\lg\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Endlich ist

5) $$\triangle\, GAH = \tfrac{1}{2}\,GH^2 = \tfrac{1}{2}\left(AH\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)^2 = \frac{AH^2}{4} = \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^2}{4}$$
$$= \frac{2x^2 - 1 - 2x\sqrt{x^2 - 1}}{4}.$$

Folglich ist das gesuchte Segment

$$F = x^2 - \left[\tfrac{1}{2} + 2 \cdot \tfrac{1}{2}\,{}^{e}\lg\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + 2\,\frac{2x^2 - 1 - 2x\sqrt{x^2 - 1}}{4}\right]$$
$$= x^2 - \left[\tfrac{1}{2} + {}^{e}\lg\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + x^2 - \tfrac{1}{2} - x\sqrt{x^2 - 1}\right],$$

also

$$F = x\sqrt{x^2 - 1} - {}^{e}\lg\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Beispiel. Die Fläche von 1 bis 2 ist

$$\overset{2}{\underset{1}{F}} = 2\sqrt{4 - 1} - {}^{e}\lg\left(2 + \sqrt{4 - 1}\right) = 2\sqrt{3} - \frac{{}^{10}\lg\left(2 + \sqrt{3}\right)}{0{,}43429}$$
$$= 2{,}1472.$$

61) **Bemerkung.** Zeichnet man die Figur in a-fachem Maßstabe, so lautet die Gleichung der Kurve $x^2 - y^2 = a^2$ oder $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$. Dabei wird $O_1E_1 = a$, $O_1J_1 = ax$. Die Fläche von a bis ax erhält den a^2-fachen Inhalt, wie vorher, also ist

$$\overset{ax}{\underset{a}{F}} = a^2\left[x\sqrt{x^2 - 1} - \operatorname{clg}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\right].$$

Setzt man $ax = x_1$, also $x = \frac{x_1}{a}$, so folgt

$$\overset{x_1}{\underset{a}{F}} = a^2\left[\frac{x_1}{a}\sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} - 1} - \operatorname{clg}\left(\frac{x_1}{a} + \sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} - 1}\right)\right]$$

$$= x_1\sqrt{x_1^2 - a^2} - a^2 \operatorname{clg}\frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}}{a}.$$

Bei der allgemeinen Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ wird die Segmentfläche das $\frac{b}{a}$-fache der vorigen, also:

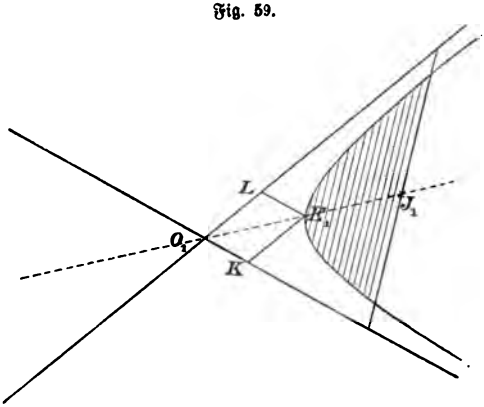
$$\overset{x}{\underset{a}{F}} = \frac{b}{a}\left[x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \operatorname{clg}\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right].$$

Dieselben Resultate liefert die selbständige Berechnung.

Bei schräg begrenzten Segmenten ist folgendes zu beachten.

Ist für die neue und die alte Figur J bezw. J_1 Halbierungspunkt der Sehne, und ist ferner $O_1E_1 : O_1J_1 = OE : OE$, so verhalten sich aus Gründen der Parallelprojektion die Segmente wie die konstanten Asymptotenparallelogramme. Denkt man sich also über $OJ_1 = z_1$ und $OE_1 = e_1$ eine gleichseitige Hyperbel, so ist für diese

Fig. 59.



$$\overset{z_1}{\underset{e_1}{F}} = z_1\sqrt{z_1^2 - e_1^2} - e_1^2 \operatorname{clg}\frac{z_1 + \sqrt{z_1^2 - e_1^2}}{e_1}.$$

Für die letztere ist das konstante Rechteck gleich $\frac{z_1^2}{2}$, für die vorliegende aber das konstante Parallelogramm gleich $O_1KE_1L_1$ oder, wenn die Gleichung war: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, konstantes Parallelogramm gleich $\frac{ab}{2}$. Das Verkleinerungsverhältnis entsprechender Flächen ist also $\frac{z_1^2}{2}:\frac{ab}{2}$ oder $z_1^2:ab$, folglich ist die schräge Segmentfläche

$$\frac{J_1}{F}_{E_1}=\frac{ab}{z_1^2}\left[z_1\sqrt{z_1^2-e^2}-e_1^2\,\mathrm{clg}\,\frac{z_1+\sqrt{z_1^2-e_1^2}}{e_1}\right].$$

Die Parabelsegmente waren schon in Teil II berechnet worden.

Jetzt ist man imstande, zahlreiche von Geraden und Kegelschnitten begrenzte Flächen, z. B. auch Sektoren und Flächenstücke, die zwischen zwei Sehnen liegen, zu berechnen.

Zweite Abteilung.
Stereometrie.

I. Vorbemerkungen über Trägheitsmomente.

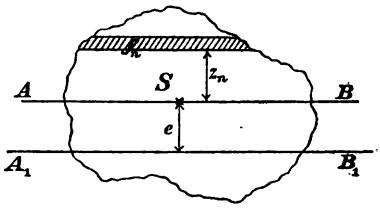
1) Eine Reihe wichtiger Aufgaben der Stereometrie und Mechanik hängt mit dem Begriffe des Trägheitsmomentes von ebenen Flächen zusammen.

Das statische Moment einer Fläche in Bezug auf eine Achse AB kann gedeutet werden als der Ausdruck

$$M = \sum f z = f_1 z_1 + f_2 z_2 + \cdots,$$

wobei jedes f_n einen schmalen Parallelstreifen zur Achse bedeutet, z_n seine Entfernung von der Achse (also den Hebelarm). Der Ausdruck wird gleich Null, wenn AB durch den Schwerpunkt geht.

Fig. 60.



Multipliziert man dagegen jeden Streifen f_n, statt mit z_n, mit z_n^2, so erhält man einen Ausdruck

$$T = \sum f z^2 = f_1 z_1^2 + f_2 z_2^2 + \cdots,$$

den man aus Gründen der Mechanik als das Trägheitsmoment der Fläche in Bezug auf die Achse AB bezeichnet.

2) Dieser Ausdruck kann im allgemeinen nicht Null werden, da alle z^2 positiv sind. Für jede Achsenrichtung läßt sich aber zeigen, daß er am kleinsten ist, wenn die Achse durch den Schwerpunkt geht.

Ist nämlich $T = \sum f z^2$ für den Schwerpunkt bekannt, und verschiebt man die Achse parallel zu sich selbst um die Strecke $\pm e$, so wird das neue Moment

$$T_1 = \sum f(z \pm e)^2 = \sum f(z^2 + e^2 \pm 2ze)$$
$$= \sum fz^2 + \sum fe^2 \pm \sum 2efz = \sum fz^2 + e^2 \sum f \pm 2e \sum fz.$$

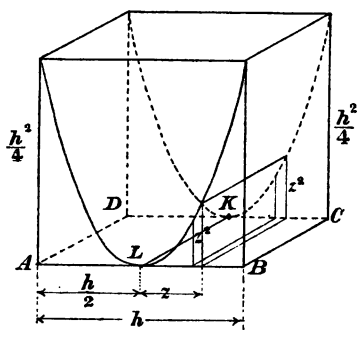
Hier ist $\sum fz^2 = T$, $e^2 \sum f = F$ (die Fläche) und $2e \sum fz = 0$, letzteres deshalb, weil das statische Moment $\sum fz$ für die Schwerpunktsachse gleich Null ist. Folglich ist

$$T_1 = T + e^2 F.$$

Kennt man also das Trägheitsmoment für eine Schwerpunktsachse, so kennt man es für jede parallele Achse. Man erhält es für diese durch Zufügung des Produktes aus der Fläche und dem Quadrate der „Verschiebung".

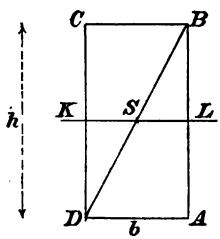
3) Man kann ein solches Trägheitsmoment stereometrisch deuten, indem man an jeder Stelle der Fläche ein Lot z^2 errichtet, wo z die Entfernung von der Achse bedeutet. Jeder ebene Vertikalschnitt senkrecht zur Achse giebt dann eine parabolische Schnittlinie.

Fig. 61.



Ist z. B. $ABCD$ ein Rechteck mit den Seiten b und h, und führt man in Bezug auf die zu b parallele Schwerpunktsachse jene Konstruktion durch, so entsteht Figur 61, wo über jedem schmalen Streifen f ein Körper vom Inhalte fz^2 steht. Da nun der ganze Rechtecks-körper den Inhalt $bh \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{bh^3}{4}$ hat, so ist der Inhalt des durch jene Konstruktion entstandenen Körpers $\frac{bh^3}{12}$, denn die Parabelfläche umfaßt $\frac{2}{3}$ des Rechtecks, der Rest ist der dritte Teil vom Rechteck.

Fig. 62.



Demnach ist das Trägheitsmoment des Rechtecks in Bezug auf seine Mittelachse KL

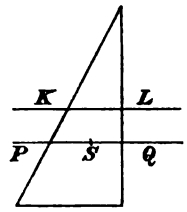
$$T = \frac{bh^3}{12} = \frac{Fh^2}{12}.$$

In Bezug auf DA ist es

$$\frac{bh^3}{12} + e^2 F = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2}{4} bh = \frac{bh^3}{3} = \frac{Fh^2}{3}.$$

4) Auf das Dreieck ABD kommt in Bezug auf die Achse KL die Hälfte des ersteren Wertes, also $\frac{bh^3}{24}$. Verschiebt man aber die Achse zum Schwerpunkte des Dreiecks hin, so erhält man

Fig. 63.



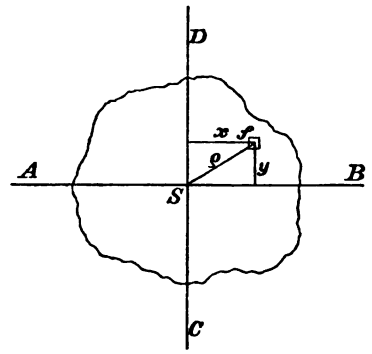
$$T = \frac{bh^3}{24} - e^2 F = \frac{bh^3}{24} - \left(\frac{h}{6}\right)^2 \frac{bh}{2} = 2\frac{bh^3}{72}$$
$$= \frac{bh^3}{36} = \frac{Fh^2}{18}.$$

Da durch bloße Horizontalverschiebung der Wert von fz^2 nicht geändert wird, so gelten die obigen Resultate auch für schiefwinklige Parallelogramme und beliebig gestaltete Dreiecke.

5) In Figur 64 ist $x^2 + y^2 = \varrho^2$, für das Flächenteilchen f ist also $fx^2 + fy^2 = f\varrho^2$, folglich für sämtliche Flächenteilchen

$$\sum fx^2 + \sum fy^2 = \sum f\varrho^2.$$

Fig. 64.



Den Ausdruck $\sum f\varrho^2$ bezeichnet man als das polare Trägheitsmoment der Fläche im Gegensatz zum axialen, weil es auf einen Punkt oder Pol bezogen ist. Setzt man $\sum fx^2 = T_1$, $\sum fy^2 = T_2$, $\sum f\varrho^2 = T_p$, so gilt die Gleichung

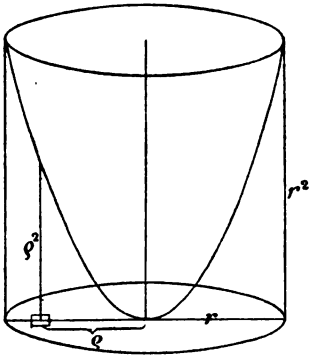
$$T_p = T_1 + T_2.$$

Also: Das polare Trägheitsmoment einer Fläche in Bezug auf einen Punkt ist stets gleich der Summe zweier axialen Trägheitsmomente, deren Achsen auf einander senkrecht stehen und durch den Punkt gehen.

6) Auch das polare Trägheitsmoment einer Fläche läßt sich stereometrisch deuten, indem man über jedem Flächenteilchen f eine Säule von der Höhe ϱ^2 errichtet, wo ϱ der Abstand von jenem Pole ist. Der entstehende Körper bildet einen paraboloischen Trichter, den Außenraum eines Rotationsparaboloids.

7) Am bequemsten ermittelt sich sein Wert für den Kreis. Da der Körper am Rande die Höhe r^2 erhält, wird der Inhalt des Cylinders $r^2\pi \cdot r^2 = r^4\pi$. Der Außenraum des Paraboloids wird nach Teil II, S. 264 die Hälfte davon oder $\frac{r^4\pi}{2}$, folglich:

Fig. 65.



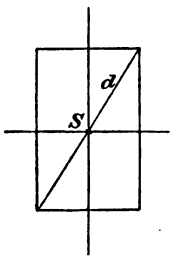
Das polare Trägheitsmoment eines Kreises ist für den Schwerpunkt als Pol:

$$T_p = \frac{r^4\pi}{2} = F\frac{r^2}{2} = \frac{d^4\pi}{32} = F\frac{d^2}{8}.$$

Aus $T_1 + T_2 = T_p$ folgt, da für den Kreis die beiden axialen Momente gleich sind,

$$T_1 = T_2 = \frac{r^4\pi}{4} = F\frac{r^2}{4} = \frac{d^4\pi}{64} = F\frac{d^2}{16}.$$

Fig. 66.



8) Das polare Trägheitsmoment des Rechtecks ist:

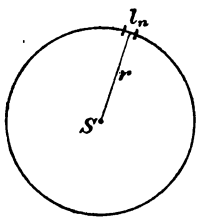
$$T_p = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12} = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2) = \frac{F}{12}d^2,$$

wo d die Diagonale, F die Fläche ist.

Aufgabe. Wie groß ist das polare Trägheitsmoment des Dreiecks?

9) Unten kommt noch das polare bezw. axiale Trägheitsmoment der **Kreislinie** zur Sprache. Jedes Bogenteilchen l_n hat von S die Entfernung r, also ist das polare Trägheitsmoment der Kreisperipherie

Fig. 67.



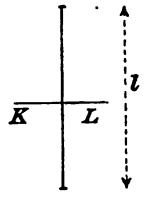
$$l_1r^2 + l_2r^2 + l_3r^2 + \cdots = r^2(l_1 + l_2 + l_3 + \cdots)$$
$$= r^2(2r\pi) = 2r^3\pi.$$

Das axiale ist wieder halb so groß, also gleich $r^3\pi$.

10) Bei dem axialen Moment einer Geraden von der Länge l tritt in der Rechtecksformel $\frac{bh^3}{12}$ oder $\frac{Fh^2}{12}$ an Stelle von F die

Länge l, ebenso tritt l an Stelle von h, man erhält also $\frac{ll^3}{12} = \frac{l^3}{12}$. Dies ist zugleich das polare Trägheitsmoment der Geraden, da das Moment der Geraden in Bezug auf sich selbst als Achse gleich Null ist.

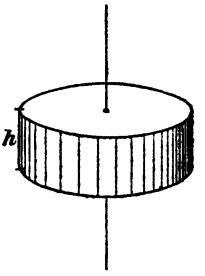
Fig. 68.



11) Über körperliche Trägheitsmomente sei nur Folgendes gesagt:

Das Trägheitsmoment einer cylindrischen Scheibe in Bezug auf die Hauptachse ergiebt sich aus dem polaren Trägheitsmomente des Kreises. Letzteres war $F\frac{r^2}{2}$, ersteres wird $J\frac{r^2}{2}$ oder $r^2\pi h\frac{r^2}{2} = \frac{r^4\pi h}{2}$, wenn J der Inhalt und h die Dicke ist.

Fig. 69.

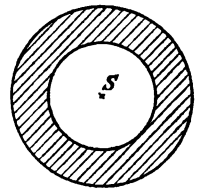


Für einen Kreisring ist das polare Trägheitsmoment

$$\frac{r^4\pi}{2} - \frac{r_1^4\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(r^4 - r_1^4)$$

$$= \frac{\pi}{2}(r^2 - r_1^2)(r^2 + r_1^2) = F\frac{r^2 + r_1^2}{2}.$$

Fig. 70.



Für einen körperlichen Schwungring von der Dicke h wird es

$$J\frac{r^2 + r_1^2}{2} = h\frac{(r^2 - r_1^2)\,\pi\,(r^2 + r_1^2)}{2}$$

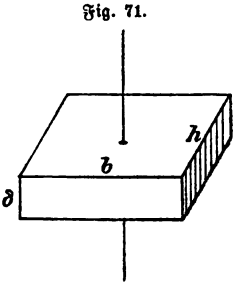
$$= \frac{\pi}{2}(r^4 - r_1^4)\,h.$$

Für eine Rechtecksscheibe ist es (nach der Rechtecks-Formel $F\frac{d^2}{12}$)

$$T = J\frac{d^2}{12} = \delta\frac{bhd^2}{12},$$

wo δ die Dicke der Scheibe ist.

Fig. 71.



Für die Kugel und Halbkugel ist das Trägheitsmoment in Teil II, S. 230 bereits berechnet worden.

12) [In der Dynamik tritt die Masse m an Stelle von J. Für einen einfach gestalteten Schwungring ist also dort $T = m\frac{r^2+r_1^2}{2}$. Die Arbeitswucht (lebendige Kraft, Energie) eines drehenden Körpers ist dort $T\frac{\vartheta^2}{2}$.

In der Lehre vom Pendel, vom Stoße, in der Lehre von der Arbeitswucht drehender Massen, auch bei gewissen stereometrischen und hydrostatischen Untersuchungen spielt das Trägheitsmoment eine hervorragende Rolle. Von besonderer Wichtigkeit ist es für die Festigkeitslehre.]

Bemerkungen. Die Trägheitsmomente von Körpern sind Ausdrücke fünfter Dimension, die von Flächen sind vierter Dimension, die von Linien sind dritter Dimension, die von Raumpunkten würden zweiter Dimension sein.

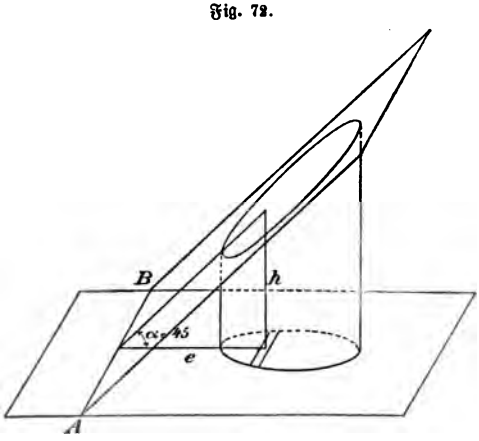
Ein interessante Übungsaufgabe bilden die stereometrischen Darstellungen des axialen Trägheitsmomentes für den Kreis und des polaren für das Quadrat. (Vergl. Einführung in das ster. Zeichnen. Figur 122 und 125.) Das letztere Moment stellt dann die Einstellung des Wassers in einem rotierenden Gefäße quadratischen Querschnitts in dem Momente dar, wo der sich bildende Trichter den Boden berührt. —

Die Trägheitsmomente regelmäßiger Vielecke, der Ellipse, Parabel u. s. w. bieten lehrreiche Übungsaufgaben.

II. Sätze über abgeschrägte Prismen und Cylinder und über Drehungskörper.

13) Ein senkrechtes Prisma oder ein senkrechter Cylinder von beliebig gestalteter Grundfläche werde durch eine unter 45^0 geneigte Ebene schräg abgeschnitten. Die letztere schneide die erweiterte Grundfläche in einer Geraden AB. Man teile die Grundfläche durch Parallele zu AB in zahlreiche schmale Streifen ein, dann ist die Höhe h über jedem Streifen gleich der Entfernung e von AB.

Fig. 72.



Sind $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ die Streifenflächen und $h_1, h_2, h_3, \ldots h_n$ die zugehörigen Höhen, so ist der Körperinhalt, wenn man von den verschwindend kleinen Treppenräumen absieht,

$$J = f_1 h_1 + f_2 h_2 + f_3 h_3 + \cdots + f_n h_n$$
$$= f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3 + \cdots + f_n e_n.$$

Letzteres ist aber die Summe der statischen Momente der einzelnen Streifen in Bezug auf die Schnittlinie AB, oder, was dasselbe ist, das statische Moment M der Grundfläche in Bezug auf die Achse AB, so daß man hat

$$J = M.$$

14) Wird nun durch AB eine anders geneigte Ebene gelegt, die den Körper schräg begrenzt, so wird sein Inhalt

$$J = M \cdot \tan \alpha.$$

Tritt nämlich jetzt nh an Stelle von h, so wird

$$J = Mn = M\frac{nh}{h} = M \tan \alpha.$$

Die Formel stimmt mit der früher abgeleiteten $J = G \cdot h_s$ überein, wo h_s die Höhe über dem Schwerpunkte der Grundfläche bedeutet.

15) **Aufgabe.** Das statische Moment des behandelten Körpers in Bezug auf die Achse AB zu berechnen.

Auflösung. Ist der Schnittwinkel der Ebene gleich 45^0, so ist das statische Moment jedes Körperstreifens in Bezug auf die Achse AB

$$(f \cdot h)e = fe^2,$$

das gesammte statische Moment ist also

$$f_1 e_1^2 + f_2 e_2^2 + f_3 e_3^2 + \cdots + f_n e_n^2.$$

Für die Streifenzahl $n = \infty$ ist dies aber das Trägheitsmoment T der Grundfläche in Bezug auf die Achse AB, also ist das statische Moment des Körpers in Bezug auf AB

$$\text{Moment} = T.$$

Ist dagegen der Schnittwinkel der Ebene gleich α, so wird die Summe der statischen Momente

$$(f_1 e_1 \tan \alpha)\, e_1 + (f_2 e_2 \tan \alpha)\, e_2 + \cdots + (f_n e_n \tan \alpha)\, e_n$$
$$= (f_1 e_1^2 + f_2 e_2^2 + f_3 e_3^2 + \cdots + f_n e_n^2) \tan \alpha = T \tan \alpha.$$

16) **Aufgabe.** Den Schwerpunkt des abgeschrägten Körpers zu finden.

Auflösung. Das Produkt aus dem Inhalte J und dem horizontal

gemessenen Schwerpunktsabstande x des Körpers ist gleich seinem statischen Momente in Bezug auf AB, also

$$x \cdot J = \text{Moment},$$

folglich

$$x = \frac{\text{Moment}}{\text{Inhalt}} = \frac{T \tan \alpha}{M \tan \alpha}$$

oder

$$x = \frac{T}{M},$$

d. h. die Projektion des Körperschwerpunktes auf die Grundfläche hat von der Schnittlinie AB eine Entfernung, die gleich ist dem Quotienten aus dem Trägheitsmomente der Grundfläche in Bezug auf die Schnittlinie und dem statischen Momente in Bezug auf dieselbe.

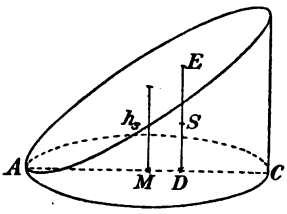
Errichtet man in dieser Entfernung über der Parallelen zu AB eine senkrechte Ebene, so liegt der Körperschwerpunkt in dieser in halber Höhe, denn jeder senkrechte Streifen des Körpers hat den seinigen in halber Höhe, die Schwerpunkte liegen also in der sämtliche Höhen halbierenden Ebene.

Dadurch ist die Lage des Körperschwerpunktes auf eine horizontale Linie beschränkt. Die Lage in dieser wird durch die Gestalt der Grundfläche näher bestimmt. Ist die Grundfläche z. B. symmetrisch gegen eine zu AB senkrecht liegende Gerade, so ist der Schwerpunkt vollständig bestimmt.

17) **Beispiel.** Wo liegt der Schwerpunkt des Cylinderhufes?

Auflösung. Das axiale Trägheitsmoment der Kreisfläche in Bezug auf jeden Durchmesser ist gleich $\frac{r^4\pi}{4}$, in Bezug auf die Tangente in A also

Fig. 73.



$$T = \frac{r^4\pi}{4} + e^2F = \frac{r^4\pi}{4} + r^2 \cdot (r^2\pi)$$
$$= \frac{5}{4} r^4\pi.$$

Das statische Moment der Kreisfläche in Bezug auf dieselbe Tangente ist

$$M = (r^2\pi)r = r^3\pi.$$

Die Entfernung der Schwerpunktslinie DE von A ist also

$$x = \frac{T}{M} = \frac{\frac{5}{4} r^4\pi}{r^3\pi} = \frac{5}{4} r.$$

18) Ganz dieselben Betrachtungen lassen sich für den Mantel jedes abgeschrägten Cylinders oder Prismas machen. Man teilt den Umfang der Grundfläche in sehr viele kleine Teilchen $g_1, g_2, g_3, \ldots$ ein, zu denen die Höhen $h_1, h_2, h_3 \ldots$ gehören, so daß die Summe der senkrechten Flächenstreifen des Mantels wird

$$O = g_1 h_1 + g_2 h_2 + g_3 h_3 + \cdots + g_n h_n.$$

Hat der Schnitt wieder 45^0 Neigung, so ist ebenso

$$O = g_1 e_1 + g_2 e_2 + g_3 e_3 + \cdots + g_n e_n.$$

Rechts aber steht die Summe der statischen Momente aller Bogenteilchen in Bezug auf die Schnittlinie AB, für die man das gesamte statische Moment M_1 der Grundperipherie setzen darf. Demnach ist die Mantelfläche

$$O = M_1$$

und bei der allgemeinen Neigung α

$$O = M_1 \tan \alpha.$$

19) Das statische Moment des Mantels in Bezug auf AB wird bei Neigung 45^0

$$(g_1 e_1) e_1 + (g_2 e_2) e_2 + \cdots + (g_n e_n) e_n = \sum g e^2 = T_1,$$

d. h. gleich dem Trägheitsmomente der Grundperipherie in Bezug auf AB; bei allgemeiner Neigung α entsteht $T_1 \tan \alpha$. Demnach ist die Entfernung der Schwerpunktslinie von AB zu berechnen aus

$$x \cdot O = T_1 \tan \alpha$$

oder aus

$$x = \frac{T_1 \tan \alpha}{O} = \frac{T_1 \tan \alpha}{M_1 \tan \alpha} = \frac{T_1}{M_1}.$$

20) **Beispiel.** Wo liegt der Schwerpunkt der Mantelfläche des Cylinderhufes?

Auflösung. Das Trägheitsmoment des Kreisumfangs in Bezug auf den Durchmesser als Achse ist $r^3\pi$, in Bezug auf die Tangente in A also $r^3\pi + (2r\pi)r^2 = 3r^3\pi$. Das statische Moment in Bezug auf dieselbe Achse ist $(2r\pi)r = 2r^2\pi$. Demnach ist jetzt die Entfernung der Schwerpunktslinie $D_1 E_1$

$$x_1 = \frac{T_1}{M_1} = \frac{3r^3\pi}{2r^2\pi} = \frac{3}{2} r.$$

21) **Bemerkung.** Diese Formeln finden Anwendung in der Hydrostatik. Dreht man nämlich die Figuren um 90^0, so erhält man das Diagramm des Wasserdrucks gegen senkrechte Seitenwände für den Fall, daß AB die Wasserstandslinie ist. Der nach unten zunehmende Druck giebt als Resultante das statische Moment der betreffenden Wandfläche in Bezug auf AB. Der Angriffspunkt aber liegt in der Tiefe

$$x = \frac{T}{M}.$$

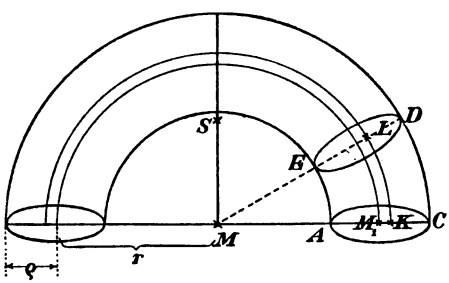
Die letztere Formel giebt zugleich den Schwingungspunkt entsprechender physischer Pendel an, außerdem den freiwilligen Drehungspunkt einer freien gestoßenen Scheibe für den Anfang der Bewegung, woraus sich die fortschreitende Bewegung ihres Schwerpunktes und die Geschwindigkeit der Drehung um den letzteren ermitteln läßt. (Anwendung auf die Berechnung der Drehung und der fortschreitenden Bewegung, in die ein Weltkörper durch den Stoß eines anderen versetzt wird.)

Von besonderer Wichtigkeit ist die Formel aber für die Untersuchung des Schwerpunktes halbierter Drehungskörper und die entsprechenden Centrifugal-Aufgaben.

22) **Aufgabe.** Wo liegt der Schwerpunkt des in Figur 74 dargestellten halben Drehungskörpers mit kreisförmigem Querschnitt?

Auflösung. Jeder kleine Sektor $ACDE$ läßt sich als abgeschrägter Cylinder betrachten. Sind r und ϱ die Radien, so hat die Schwerlinie KL eine Entfernung e von M, die sich aus

Fig. 74.



$$e = \frac{T}{M} = \frac{\frac{\varrho^4\pi}{4} + \varrho^2\pi \cdot r^2}{\varrho^2\pi \cdot r} = \frac{\varrho^2 + 4r^2}{4r}$$

berechnet. Auf dem mit diesem Radius e um M geschlagenen Kreise liegen die Schwerpunkte der sämtlichen kleinen Sektoren. Der Schwerpunkt des Körpers fällt also mit dem dieses Halbkreisbogens zusammen. Demnach ist

$$MS = \frac{2e}{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{T}{M} = \frac{2}{\pi}\frac{\varrho^2 + 4r^2}{4r} = \frac{\varrho^2 + 4r^2}{2r\pi}.$$

23) Wichtiger ist das allgemeine Resultat, daß für halbe Rotationskörper von beliebigem Hauptschnitt

$$MS = \frac{2}{\pi}\frac{T}{M}$$

die Entfernung des Schwerpunktes vom Centrum ist.

[In diesem Punkte ist die Masse des halben Rotationskörpers vereinigt zu denken, wenn man berechnen will, durch welche Centrifugalkraft die eine Hälfte des ganzen Körpers von der andern abgerissen werden soll, sobald er schnell um seine Hauptachse dreht.

Ist ϑ die am Einheitskreise gemessene Winkelgeschwindigkeit, so ist die Centrifugalkraft

$$K = m \cdot \overline{MS} \cdot \vartheta^2 = m\frac{2}{\pi}\frac{T}{M}\vartheta^2.$$

Hier ist $m = \frac{p}{g} = \frac{J \cdot p'}{g}$, wenn J der Inhalt, p' das specifische Gewicht des halben Körpers ist. Nun ist aber nach Guldin $J = \frac{2r\pi \cdot F}{2}$ und das Moment $M = F \cdot r$, also ist

$$K = \frac{r\pi F p'}{g}\frac{2}{\pi}\frac{T}{Fr}\vartheta^2 = 2\frac{p'}{g}T\vartheta^2.$$

Zur Kenntnis der Beanspruchung eines beliebig gestalteten Schwungrings durch die Centrifugalkraft reicht also die Kenntnis des Trägheitsmoments der Fläche, der Winkelgeschwindigkeit und des specifischen Gewichts p' aus.

Der vorher behandelte Körper mit kreisförmigem Querschnitt wird also beansprucht durch

$$K = \frac{2p'}{g}\left[\frac{\varrho^4\pi}{4} + \varrho^2\pi r^2\right]\vartheta^2 = \frac{\varrho^2\pi p'}{2g}(\varrho^2 + 4r^2)\vartheta^2.$$

Für die Kugel bestätigt sich das bekannte Resultat $\frac{p'}{g}\frac{r^4\pi\vartheta^2}{4}$. Aufgaben solcher Art sind von Wichtigkeit nicht nur für die Theorie der Schwungräder, sondern auch für die der sogenannten Centrifugen, bei denen nicht nur die Centrifugalkraft des halben Gefäßes, sondern auch der gegen die Wände gepreßten Flüssigkeit zu berechnen ist. Die Gestalt der letzteren kann bei großen Geschwindigkeiten als Rotationskörper eines Kreissegmentes betrachtet werden, wenn das Gefäß kugelförmig begrenzt ist.]

24) **Aufgabe.** In entsprechender Weise den Schwerpunkt für den Mantel des durch Figur 74 dargestellten halben Drehungskörpers zu bestimmen.

Es ist

$$e_1 = \frac{T_1}{M_1} = \frac{\frac{\varrho^2\pi}{2} + \varrho\pi r^2}{\varrho\pi r} = \frac{\varrho^2 + 2r^2}{2r},$$

also

$$MS_1 = \frac{2e_1}{\pi} = \frac{\varrho^2 + 2r^2}{r\pi}.$$

Statt des Halbringes kann man auch beliebige Ringsektoren in solcher Weise behandeln.

Aufgaben. Wie groß ist der Inhalt des über einem Halbkreise stehenden und in bestimmter Weise abgeschrägten Cylinders, wie groß ist die Mantelfläche, und wo liegt der Schwerpunkt des Körpers und des Mantels?

Ein Drehungskörper entstehe durch Drehung eines Halbkreises um eine Achse in seiner Ebene, die parallel zum Durchmesser ist. Wie groß sind Mantel und Inhalt des Körpers? Wo liegt der Schwerpunkt der Körperhälfte und wo der des Mantels? Zwei Fälle sind zu unterscheiden: in dem einen liegt die Achse auf der Durchmesserseite, im andern entgegengesetzt.

III. Die Kegelschnittsflächen und die zugehörigen Körper.

a) Cylinder.

25) Über den geraden und schrägen Kreiscylinder ist in Teil I und II das Nötige gesagt. Die Inhaltsformeln lassen sich auch für den Fall aufstellen, daß die Grundfläche ein Kreissegment ist.

Dasselbe gilt vom elliptischen Cylinder. Die Inhaltsformel ist $J = ab\pi h$. Auch hier kann die Grundfläche ein Ellipsensegment sein.

Bei dem parabolischen Cylinder kann von einer Inhaltsberechnung nur die Rede sein, wenn die Grundfläche als Segment durch eine Sehne begrenzt ist. Die Berechnung des Segmentes ist in Teil II, S. 250 gelehrt worden.

Auch für den hyperbolischen Cylinder ist das in Geometrie Nr. 60 und 61 behandelte Segment der Berechnung zu Grunde zu legen.

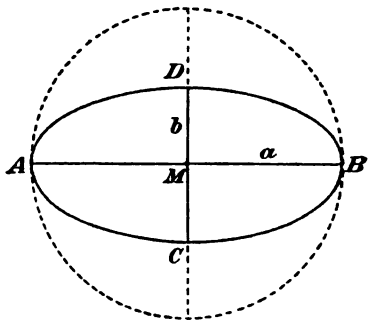
b) Kegel.

26) Über den geraden und schiefen Kreiskegel und den elliptischen Kegel ist neues nicht zu bringen. Für den parabolischen und hyperbolischen Kegel ist die Inhaltsbestimmung möglich, wenn die Grundfläche ein begrenztes Segment ist.

c) Das Ellipsoid.

27) Dreht sich eine Ellipse um eine der beiden Achsen, so entsteht ein Drehungsellipsoid. Man kann sich dasselbe auch dadurch entstanden denken, daß man in einer Kugel auf einem Hauptschnitte AB Lote errichtet und sämtliche Lote in konstantem Verhältnis $\frac{b}{a}$ verkürzt oder verlängert. Die Endpunkte liegen dann statt auf der Kugelfläche auf der des Drehungs-Ellipsoids. Der Kugelinhalt $\frac{4}{3}a^3\pi$ geht über in $\left(\frac{4}{3}a^3\pi\right)\frac{b}{a} = \frac{4}{3}a^2b\pi$, wenn b die Drehungsachse ist, und in $\frac{4}{3}ab^2\pi$, wenn a die Drehungsachse ist.

Fig. 75.

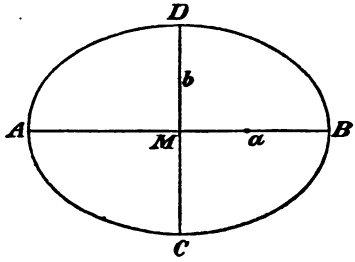


(Die Berechnung der Oberfläche überschreitet das Ziel der Schule.)

Bemerkung. Nach Guldin ist $J = 2\varrho\pi F$ und $\varrho = \frac{J}{2\pi F}$. Der Schwerpunktsabstand der halben Ellipsenfläche CDB in Figur 75 ist also $\varrho = \frac{\frac{4}{3}a^2b\pi}{2\pi\frac{ab\pi}{2}} = \frac{4a}{3\pi}$, er wird also ebenso berechnet, wie beim Kreise. Dies läßt sich auch auf dem Wege einfacher Anschauung nachweisen.

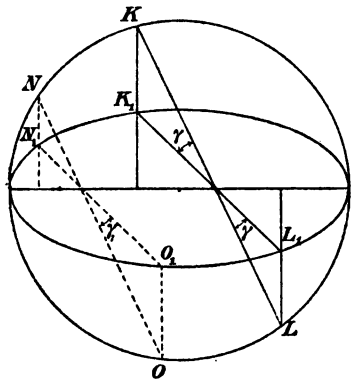
28) Figur 76 stellt wieder den Aufriß eines Drehungsellipsoids dar. Errichtet man in demselben auf dem Hauptschnitte $ADBC$ Lote bis zur Oberfläche und unterwirft man diese der Verkürzung oder Verlängerung nach dem konstanten Verhältnis $\frac{c}{a}$, so entsteht an Stelle des Drehungsellipsoids das dreiachsige Ellipsoid mit den Achsen a, b und c. Der Inhalt $\frac{4}{3}a^2b\pi$ geht über in $\left(\frac{4}{3}a^2b\pi\right)\frac{c}{a}$ oder in $J = \frac{4}{3}abc\pi$.

Fig. 76.



29) Die Parallelschnitte einer Kugel sind unter einander ähnlich. Verwandelt man die Kugel in Figur 77 durch Lotverkürzung in ein Drehungsellipsoid, so geht jeder Kugelschnitt KL in einen Ellipsoidschnitt K_1L_1 über; jeder zu KL parallele Kugelschnitt NO geht in einen Ellipsoidschnitt N_1O_1 über, der zum vorigen, K_1L_1, parallel ist. Dies folgt sofort aus der Ähnlichkeit der entsprechenden Dreiecke. Die Ellipsoidschnitte sind Parallelprojektionen der Kugelschnitte, und da die Winkel γ und γ_1 für die beiden gezeichneten Paare übereinstimmen, so sind die Parallelschnitte des Ellipsoids einander ähnlich. Ähnliche schiefe Kreiscylinder werden nämlich hier auf ähnliche Weise geschnitten.

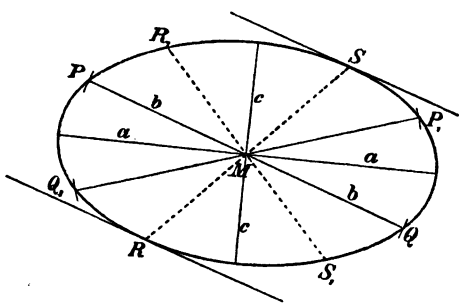
Fig. 77.



Geht man vom Drehungsellipsoid zum dreiachsigen über, so erkennt man auf dieselbe Art, daß auch die Parallelschnitte des dreiachsigen Ellipsoids unter einander ähnlich sind.

30) Jedes dreiachsige Ellipsoid hat zwei Scharen von Kreisschnitten. Sind nämlich die Achsen der Größe nach a, b und c, so daß c die kleinste ist, so läßt sich in der durch a und c bestimmten Ebene mit b ein Kreis schlagen, der den entsprechenden Hauptschnitt in P, Q, P_1 und Q_1 schneidet. Der Aufriß PQ stellt einen Kreisschnitt dar, denn die durch den Punkt M dargestellte Halbachse b ist gleich der darauf senkrechten Halbachse MP. Sämtliche Parallelschnitte zu PQ sind als ähnliche Ellipsen ebenfalls Kreise. Die Tangentialebenen in R und S geben die Grenzpunkte der einen Kreisschar. Auf RS liegen die Mittelpunkte der entsprechenden Kreise. Dasselbe findet mit der

Fig. 78.

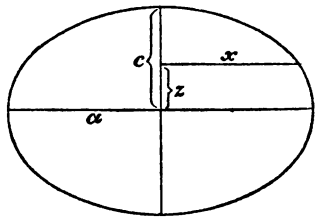


symmetrisch liegenden Kreisschar statt. Die Punkte R und S, R_1 und S_1 heißen Nabelpunkte des Ellipsoids. Sie sind von Bedeutung für die mathematische Physik.

31) Verschiebt man die Kreisschnitte der einen Schar in geeigneter Weise auf einander, so nämlich, daß die Verbindungslinie RS senkrecht zu PQ wird, so ist das Ellipsoid in ein Drehungsellipsoid verwandelt. In besonderen Fällen kann es auch zur Kugel werden.

32) Aus der Berechnung der Kugelsegmente läßt sich leicht die der Ellipsoidsegmente ableiten, und zwar nach der Methode der konstanten Verkürzung bezw. Verlängerung. Man kann aber auch folgendermaßen verfahren.

Fig. 79.



In Figur 79 ist $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ die Gleichung der Ellipse, also ist

$$x^2 = a^2 - \frac{a^2}{c^2} z^2.$$

Stellt die Zeichnung ein Drehungsellipsoid mit der Achse c dar, so hat der Horizontalschnitt in der Höhe z die Fläche $x^2\pi$ oder

$$q = a^2\pi - \frac{a^2\pi}{c^2} z^2.$$

Nach der Summenformel (Teil II, Ster. Nr. 64) ist also die Schicht von der Höhe Null bis zur Höhe z vom Inhalte

$$J = a^2\pi \frac{z}{1} - \frac{a^2\pi}{c^2} \frac{z^3}{3} = a^2\pi z \left(1 - \frac{z^2}{3c^2}\right).$$

Für $z = c$ bestätigt sich die obige Inhaltsformel für die Hälfte des Drehungs-Ellipsoids.

33) Stellt dagegen die Figur ein dreiachsiges Ellipsoid mit den Halbachsen a, b und c dar, so ist wegen der Ähnlichkeit der Horizontalschnitte das zur Höhe z gehörige y von der Länge $y = x\frac{b}{a}$, und der Horizontalschnitt hat jetzt die Fläche $xy\pi = xx\frac{b}{a}\pi = x^2\frac{b}{a}\pi$ oder

$$q = \left(a^2 - \frac{a^2}{c^2} z^2\right) \frac{b}{a} \pi.$$

Nach der Summenformel ist also die Schicht von Höhe 0 bis Höhe z vom Inhalte

$$J = ab\pi z - \frac{ab\pi z^3}{c^2\,3}.$$

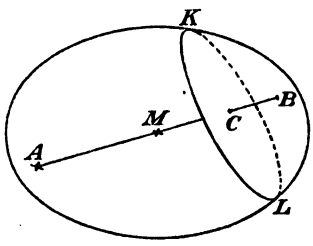
Für $z = c$ bestätigt sich die obige Inhaltsformel (für die Hälfte des Körpers).

Aus den Schichten kann man die Segmentformel leicht ableiten.

Auch die Simpson-Formel läßt sich benutzen, da der 3. Grad beim Querschnitt nicht überstiegen wird.

34) Für allgemeine Segmente ergiebt sich folgende Methode als zweckmäßigste: KL sei ein ganz beliebiger Schnitt des dreiachsigen Ellipsoids; B sei auf dessen Oberfläche der Berührungspunkt der zur Schnittebene parallelen Tangentialebene. Der Durchmesser AB wird in einem bestimmten Verhältnis $BC:CA$ durch die Schnittebene geteilt. Teilt man bei einer Kugel einen Durchmesser in demselben Verhältnis durch eine zu ihm senkrechte Schnittebene, so verhalten sich in beiden Körpern die Segmente wie die ganzen Körper. Ist also S das Ellipsoidsegment, J der Ellipsoidinhalt, S_1 das Kugelsegment, J_1 der Kugelinhalt, so ist $S:S_1 = J:J_1$ und $S = S_1\frac{J}{J_1}$. Dies ergiebt sich aus der obigen Entstehungsweise des Ellipsoids aus der Kugel, bei der es sich um eine Art von Parallelprojektion handelt, die auf die Verhältnisse der Körperteile keinen Einfluß ausübt.

Fig. 80.



Das Ellipsoid ist von Wichtigkeit für die Untersuchung der Erdgestalt, für die Geometrie überhaupt und für die mathematische Physik, namentlich für die Optik, Potentialtheorie und Hydromechanik.

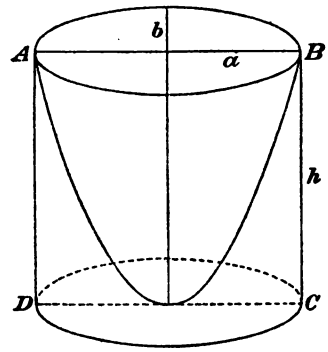
d) Kreis-Paraboloid und elliptisches Paraboloid.

35) Das durch Drehung einer Parabel um ihre Achse entstehende Drehungs- oder Kreisparaboloid ist schon in Teil II (Kegelschnitte Nr. 43) als die Hälfte des zugehörigen Cylinders nachgewiesen. Der Inhalt ist also

$$J = \tfrac{1}{2}a^2\pi h.$$

Verkürzt man sämtliche auf der Schnittebene $ABCD$ senkrechten Halbsehnen beider Körper in konstantem Verhältnis $\frac{b}{a}$, so entsteht ein elliptischer Cylinder und das zugehörige elliptische Paraboloid, welches nach dem Satze von Cavalieri wiederum halb so großen Inhalt hat, wie der Cylinder.

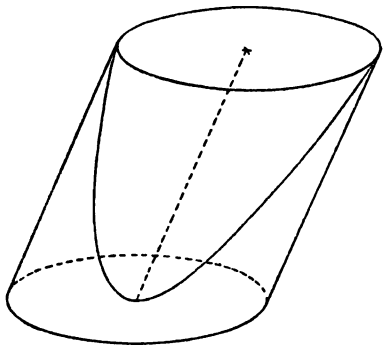
Fig. 81.



36) Das Drehungsparaboloid ist ein besonderer Fall vom Drehungsellipsoid, seine Parallelschnitte sind also ebenfalls untereinander ähnlich. Das elliptische Paraboloid ist ein besonderer Fall vom dreiachsigen Ellipsoid, es hat ebenfalls ähnliche Parallelschnitte und unter diesen zwei Scharen von Kreisschnitten.

Der Satz von der Halbierung des Cylinderinhalts durch das Paraboloid bleibt auch bestehen, wenn man durch Horizontalverschiebung der Horizontalschnitte Figur 81 in Figur 82 verwandelt.

Fig. 82.



Auf die Bedeutung des Drehungsparaboloids für die Hydromechanik, für die Lehre von den Trägheitsmomenten und für die mathematische Physik ist schon in Teil II aufmerksam gemacht worden.

e) Hyperboloid.

37) Durch Drehung einer Geraden um eine sie nicht schneidende, sondern schräg kreuzende Achse entsteht nach Teil II (V. 43 und IV. 2) ein Drehungshyperboloid mit einem Mantel. Ein solches hat demnach auf sich zwei Scharen gerader Linien. Daraus folgt, daß die Schrägschnitte des Körpers Ellipsen sind, sobald der Schnitt eine geschlossene einarmige Kurve giebt.

Man kann nämlich nach der Methode von Dandelin Berührungskugeln einsenken, die auch die Ebene berühren. Aus der Gleichheit der Kugel-Tangenten XF und XA bezw. XF_1 und XB folgt dann für jeden Punkt der Schnittkurve $FX + XF_1 = AB = \text{const.}$

Wird dagegen der Schnitt zweiarmig, so wird er, wie beim Kegel, aus demselben Grunde ein Kegelschnitt, denn dann wird

Fig. 83.

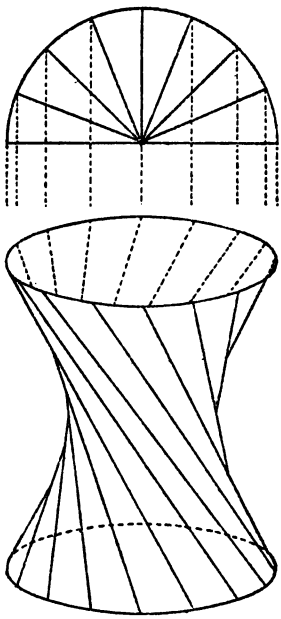
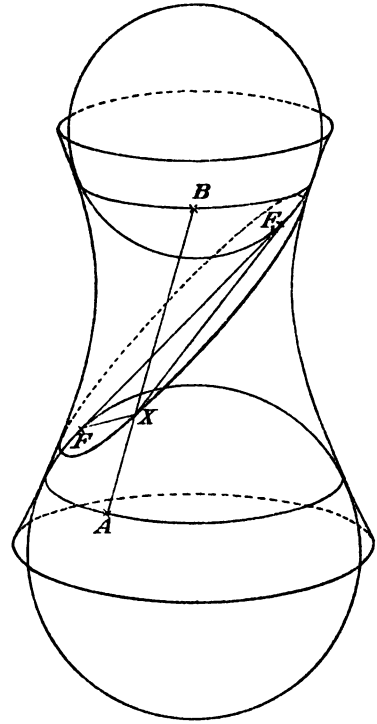


Fig. 84.



$XF - XF_1 = XA - XB = AB$. Wird der Schnitt parallel zu einer Seite des Asymptotenkegels, so entsteht eine Parabel. (Vgl. Teil II, Fig. 180 u. 183.)

38) Die Horizontalschichten des Körpers sind leicht zu berechnen. Auf diese Berechnung kann sich die Schule beschränken.

Ist die Gleichung des Hauptschnitts

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so ergiebt sich für die Höhe y der Abstand x aus der Gleichung

$$x^2 = a^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2,$$

also ist der Querschnitt

$$q = x^2\pi = a^2\pi + \frac{a^2}{b^2}\pi y^2.$$

Nach der Summenformel ist die Körperschicht von 0 bis y vom Inhalte

$$J = a^2\pi y + \frac{a^2}{3b^2}\pi y^3.$$

Mit Hülfe der Segmentformel läßt sich hieraus der Schwerpunkt des Hyperbelsegments berechnen.

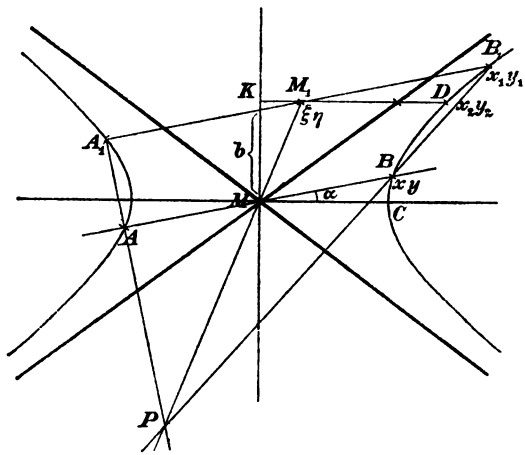
39) Es fragt sich, ob die Parallelschnitte ähnliche Kegelschnitte sind.

Es genügt, dies an dem gleichseitigen Drehungshyperboloid zu untersuchen. Die Gleichung der Hyperbel*) desselben sei

1) $x^2 - y^2 = 1$,

die Schnittlinien AB und A_1B_1 mögen die aus $A = \tan\alpha$ folgende Neigung α haben.

Fig. 85.



Die Gleichung von AB ist also

2) $y = Ax$.

Aus 1) und 2) folgen als Koordinaten von B

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - A^2}} \quad \text{und} \quad y = \frac{A}{\sqrt{1 - A^2}},$$

so daß $MB^2 = x^2 + y^2 = \frac{1 + A^2}{1 - A^2}$ ist. Der Horizontalschnitt des Hyperboloids durch M hat aber überall den Radius $MC = 1$, folglich hat die Ellipse AB das Achsenverhältnis

$$\sqrt{\frac{1 + A^2}{1 - A^2}} : 1 \quad \text{oder} \quad \sqrt{1 + A^2} : \sqrt{1 - A^2}.$$

Die Gleichung von A_1B_1 sei

3) $$y = Ax + b.$$

*) Fig 85 stellt die allgemeine Hyperbel dar. Für den Specialfall der Rechnung denke man sich die Asymptoten aufeinander senkrecht.

Aus 1) und 3) ergeben sich die Koordinaten von A_1 und B_1 als

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{Ab \pm \sqrt{1 + b^2 - A^2}}{1 - A^2}, \quad y_{\frac{1}{2}} = \frac{b \pm A\sqrt{1 + b^2 - A^2}}{1 - A^2}.$$

Der Halbierungspunkt M_1 von A_1B_1 hat die Koordinaten $\frac{x_1 + x_2}{2}$ und $\frac{y_1 + y_2}{2}$, oder

$$\xi = \frac{Ab}{1 - A^2} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{b}{1 - A^2}.$$

Folglich ist

$$M_1B_1 = \sqrt{(x_1 - \xi)^2 + (y_1 - \eta)^2} = \frac{\sqrt{(1 + b^2 - A^2)(1 + A^2)}}{(1 - A^2)}.$$

Die Haupthyperbel hat aber in Höhe η die Abscisse $KD = x_2 = \sqrt{1 + \eta^2} = \sqrt{1 + \frac{b}{(1 - A^2)^2}}$, und die auf KD in M_1 senkrecht zur Zeichnungsebene errichtete Halbsehne des Horizontalschnitts ist $s = \sqrt{x_2^2 - \xi^2} = \sqrt{\frac{1 - A^2 + b^2}{1 - A^2}}$. Demnach ist das Achsenverhältnis der Ellipse A_1B_1, d. h. $\frac{M_1B_1}{s} = \sqrt{\frac{1 + A^2}{1 - A^2}}$, also dasselbe wie bei AB.

M_1M ist konjugierter Durchmesser zu AB und A_1B_1. Auf ihm schneiden sich aus Projektionsgründen A_1A und B_1B in einem Punkte P. Die Ellipsen A_1B_1 und AB sind in Bezug auf P perspektivisch, also eine die Projektion der andern. Man kann von dieser für jeden Hauptschnitt geltenden projektivischen Bemerkung ausgehen und erhält dadurch einen rein geometrischen Nachweis für die Ähnlichkeit der beiden Parallelschnitte ohne alle Rechnung. (Die Schnittkurven sind perspektivisch und ähnlich bei Horizontalschnitten, folglich allgemein bei Parallelschnitten.)

Handelt es sich um Drehungshyperboloide, die aus der allgemeinen Hyperbel entstehen, also aus $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, so ist die Betrachtung nur unwesentlich verschieden. Man kann jedoch auch durch konstante Verkürzung oder Verlängerung der senkrechten Halbsehnen zur allgemeinen Hyperbel übergehen.

Sind die Parallelschnitte nicht Ellipsen, sondern zweiteilige, also Hyperbeln, so ist die Koordinatenbetrachtung nur eine unbedeutende Umgestaltung der vorigen.

Also gilt ganz allgemein der Satz:

Die Parallelschnitte des einteiligen Drehungshyperboloids sind ähnliche Kegelschnitte.

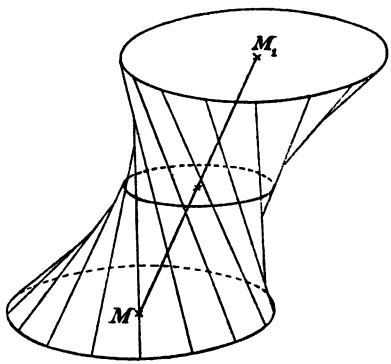
Auf der Existenz der Linien auf dem Drehungshyperboloide beruht die Möglichkeit der Konstruktion der sogenannten Hyperbelräder, die

ähnlich, wie die konischen Räder arbeiten, wobei jedoch die Achsen sich nicht schneiden, sondern in beliebiger Weise kreuzen. Die Zähne rollen sich nicht einfach aufeinander ab, sondern verschieben sich auch seitlich.

40) Das einteilige Drehungshyperboloid geht in ein dreiachsiges über, sobald man sämtliche auf einem senkrechten Hauptschnitte stehenden Lote in konstantem Verhältnis verkürzt. Dabei bleiben die beiden Gruppen gerader Linien auf der Oberfläche als solche bestehen, so daß die Figur 83 noch immer als Darstellung des Körpers gelten kann. Die Inhaltsberechnung ändert sich in derselben Weise, wie beim Übergange vom Drehungsellipsoid zum dreiachsigen. Der Körper hat zwei Scharen von Kreisschnitten. Die Ähnlichkeit der Parallelschnitte bleibt erhalten.

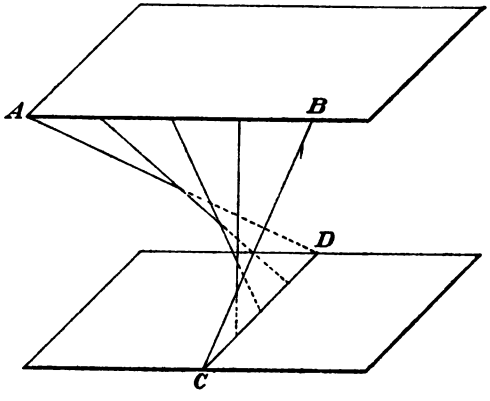
41) Auch durch Horizontalverschiebung der Kreisschnitte des Drehungshyperboloids gelangt man zum dreiachsigen Hyperboloide, nur müssen die Mittelpunkte der Kreise auf einer Geraden MM_1 bleiben. Auch jetzt bleiben die geraden Linien bestehen. Sind die Abschnitte auf dem einen der Kreise gleich groß, so sind sie es auch auf dem andern.

Fig. 86.



42) Denkt man sich jetzt die beiden Kreise unendlich groß, d. h. als horizontale gerade Linien (die sich kreuzen wie AB und CD in Figur 87) und in gleiche Stücke zerlegt sind, so geben die Verbindungslinien die bereits in Teil II (beim Prismatoid mit windschiefen Seitenflächen) behandelten Flächen. Sie bilden das sogenannte hyperbolische Para-

Fig. 87.

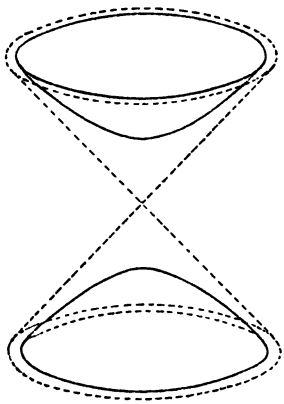


boloid. (Vergl. Figur 131 in der Einführung in das stereometrische Zeichnen und Figur 146 in Teil II.)

Verbindet man A, B, C und D auf alle Arten, so hat man das durch die Fläche halbierte Halbtetraeder, so daß nach Teil II, Ster. Nr. 37 die betreffende Inhaltsberechnung bereits erledigt ist.

43) Drehung der Hyperbel um die andere Achse giebt das zweiteilige Drehungshyperboloid. In Figur 88 ist es so dargestellt, daß statt der Gleichung

Fig. 88.



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die folgende maßgebend ist,

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Zu Zwecken der Berechnung kann man von der Scheitelgleichung ausgehen, also von

$$x^2 = 2py + \frac{p}{a}y^2,$$

woraus sich der Querschnitt und mit Hülfe der Summenformel der Segmentinhalt leicht ergiebt.

Der Körper läßt sich durch konstante Verkürzung der auf einem Hauptschnitt stehenden Lote in ein dreiachsiges Hyperboloid mit elliptischem Horizontalschnitt verwandeln, dessen Berechnung ebenso einfach ist. Näher soll auf ihn nicht eingegangen werden. Die Entwickelungen sind den beim einteiligen Hyperboloid gegebenen ganz analog.

IV. Einige Anwendungen des Satzes von Cavalieri.

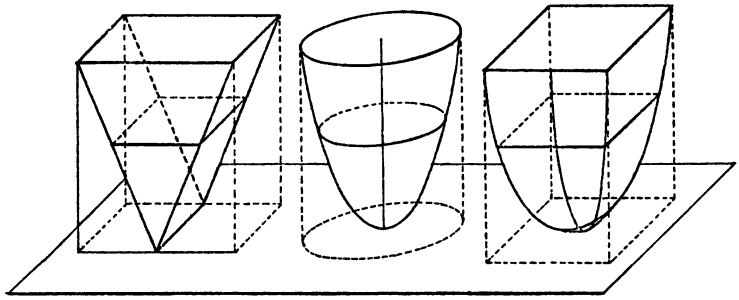
44) Nach Teil I, Ster. Nr. 22 u. f. w. gelten folgende Sätze:

Der Inhalt eines Körpers, der überall denselben Horizontalschnitt G hat, ist $J = Gh$. Dabei mag die Gestalt des Querschnitts in den einzelnen Höhen sein, welche sie will. Auch die horizontale Lagerung der einzelnen Schnitte kann eine willkürliche sein, d. h. jede Schicht kann in ihrer Ebene fortschreitend und drehend bewegt werden, ohne daß der Inhalt sich ändert.

45) Der Inhalt eines Körpers, dessen Horizontalschnitt proportional der Höhe ist, ist $J = G\frac{h}{2}$. In Figur 89

sind einige solche Körper dargestellt. Der erste ist der auf die Kante gestellte Dachkörper, der zweite ist ein Drehungsparaboloid, welches dadurch entstanden ist, daß man jeden Querschnitt des ersten in einen gleich großen Kreis verwandelt. Der dritte entsteht dadurch, daß man

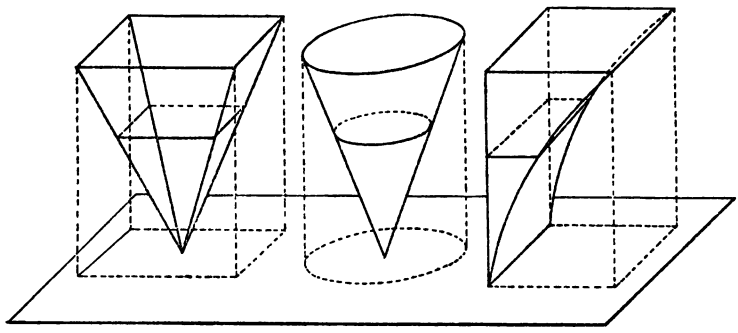
Fig. 89.



jeden rechteckigen Querschnitt des ersten in ein Quadrat verwandelt. Ebenso kann man ihm ähnliche Dreiecke, ähnliche Fünfecke und dergleichen als Querschnitte geben. Bei geeigneter Anordnung der horizontalen Lagerung werden die Grenzlinien Parabeln. Jeder dieser Körper ist die Hälfte des zugehörigen Prismas bezw. Cylinders. Auf die obere Fläche gestellt würden die letzteren paraboloische Gewölbe geben.

46) Der Inhalt eines Körpers, dessen Horizontalschnitt proportional dem Quadrate der Höhe ist, ist $J = G\frac{h}{3}$.

Fig. 89b.



Hierher gehören Pyramide, Kegel und paraboloischer Cylinder in der gezeichneten Stellung.

Jeder dieser Körper ist der dritte Teil des zugehörigen Cylinders bezw. Prismas.

47) In ähnlicher Weise kann man auch mit höheren Graden

Fig. 90.

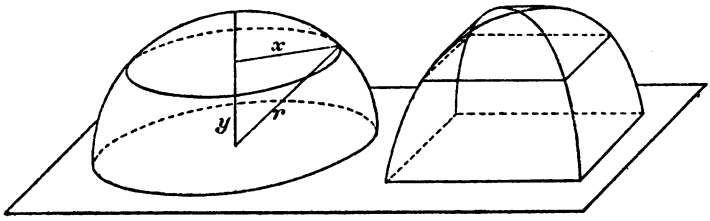


Fig. 91.

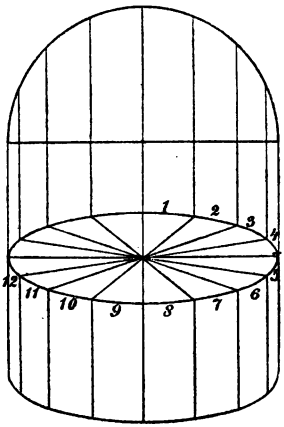
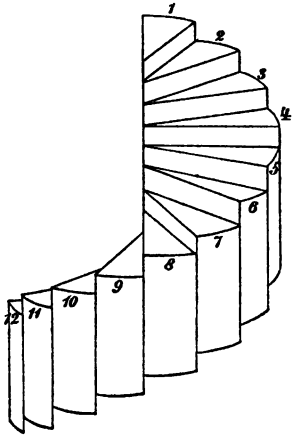


Fig. 92.



verfahren und auch von der Querschnittsfläche

$$q = a + by + cy^2 + dy^3 + \cdots$$

gruppenweise zusammenfassen.

So ist z. B. die Halbkugel ein Körper, dessen Querschnitt ist:

$$q = x^2\pi = r^2\pi - y^2\pi.$$

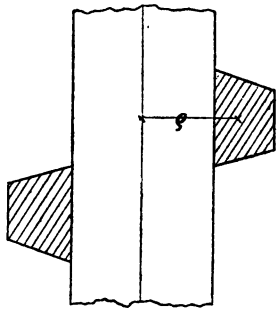
Man kann die Konstruktion eines Körpers verlangen, der in gleichen Höhen dieselben Querschnitte hat, wobei jedoch die letzteren z. B. regelmäßige Vielecke, etwa Quadrate, sein sollen. Dann entstehen elliptische Begrenzungen und Körper desselben Inhalts, wie die Kugel. Durch konstante Verkürzung bezw. Verlängerung kann man die elliptischen Cylinderflächen in kreiscylindrische verwandeln. Dadurch erhält man einige der gebräuchlichen Gewölbeformen, deren Inhalt also mit dem eines entsprechenden halben Drehungsellipsoids übereinstimmt. Dies sind die sogenannten Klostergewölbe. (Siehe unten Abschnitt V.)

48) Eine besondere Art der Anwendung des Princips von Cavalieri hat man noch bei den Schraubengewinden.

Man denke sich einen Cylinder in zahlreiche gleiche Sektoren geteilt. Jedem der Sektoren gebe man an der Achse eine solche Steigung, daß eine regelrechte Stufentreppe entsteht, von der in der Figur 92 ein Teil gezeichnet ist. Denkt man sich die Anzahl der Sektoren unendlich groß, so erhält man die parallelperspektivische Darstellung eines Schraubengewindes. Da aber jeder Sektor nur verschoben worden ist, so muß der Inhalt für jeden Umgang des Gewindes gleich dem Cylinder sein.

Folglich allgemeiner: Für jeden Umgang eines Schraubengewindes ist der Inhalt gleich dem des entsprechenden Guldinschen Rotationskörpers.

Fig. 93.



49) Man zeichnet die Schraubengewinde in der Regel nur im orthographischen Aufriß. Läßt man z. B. durch ein Trapez ein Gewinde bilden, so ist der Gewindekörper für jeden Umgang vom Inhalte $J = 2\varrho\pi F$, wo F die erzeugende Fläche, ϱ ihr Schwerpunktsabstand von der Achse ist.

Dasselbe gilt vom Dreiecksgewinde, vom konvexen und konkaven Halbkreisgewinde, von beiden Arten elliptischer Gewinde u. s. w. Die Anfertigung der entsprechenden Zeichnungen giebt eine lehrreiche Übung. (Vergl. Einführung Figur 76 bis 80.)

V. Einige Gewölbeformen.

50) Figur 94 stellt das kreisbogenförmige Tonnengewölbe dar. Das Rechteck ABB_1A_1 ist die Grundfläche, der cylindrische Mantel die Laibungsfläche, ABC die Stirnfläche, $AB = d = 2r$ die Spannweite, $MC = r$ die Pfeilhöhe, $CC_1 = b$ die Scheitellinie, BB_1 und AA_1 sind die Widerlagslinien, A, B, B_1, A_1 sind Widerlagspunkte.

Fig. 94.

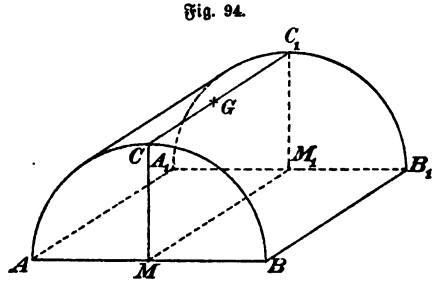


Fig. 95.

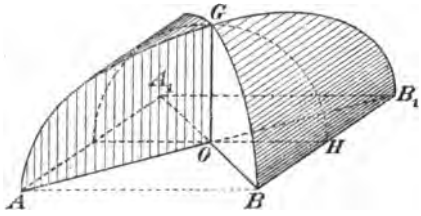
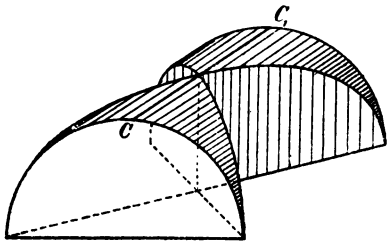


Fig. 96.



Der Gewölberaum, die verschiedenen Flächen und Kanten sind leicht zu berechnen.

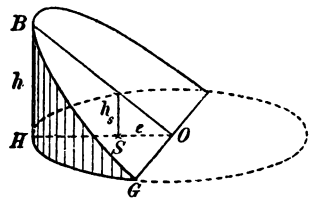
51) Legt man durch die Diagonalen AB_1 und A_1B senkrechte Ebenen, so wird das Tonnengewölbe in vier Teile zerlegt, von denen je zwei kongruent sind. In Figur 95 und 96 sind je zwei kongruente Teile besonders dargestellt.

Die eine Gruppe hat nur einen Scheitelpunkt G. Diese beiden Teile heißen Gewölbewangen. Die andere hat eine Scheitellinie CC_1, diese Teile heißen Gewölbekappen.

52) **Aufgabe.** Den Gewölberaum und die Laibungsfläche einer Wange zu berechnen.

Figur 97 stellt den Cylinderhuf über einem Halbkreise dar. Ist S der Schwerpunkt der Grundfläche und h_s die zugehörige Höhe, so ist der Körperinhalt $J = \frac{r^2\pi}{2} h_s$. Nun ist aber $h_s : h = e : r$, also $h_s = h\frac{e}{r}$, und zwar ist $OS = e = \frac{4r}{3\pi}$ (nach Guldin), folglich

Fig. 97.



$$J = \frac{r^2\pi}{2} \cdot \frac{h}{r} \frac{4r}{3\pi} = \frac{2}{3} r^2 h.$$

In Figur 95 ist der Gewölbeteil $OHGB$ mit der Hälfte dieses Hufes identisch, der ganze Gewölberaum hat also, da $h = \frac{b}{2}$ ist, den Inhalt

$$J = \frac{2}{3} r^2 \frac{b}{2} = \frac{r^2 b}{3} = \frac{d^2 b}{12}.$$

Der Mantel des Hufes ist $r\pi h_s'$, wenn h_s' die zum Schwer-

punkte S' des Halbkreisbogens gehörige Höhe ist. Hier ist $h_s' : h = e' : r$, also $h_s' = h\frac{e'}{r}$. Da aber nach Guldin $e = \frac{2r}{\pi}$ ist, so ist Mantel $M = r\pi\frac{h}{r}\frac{2r}{\pi} = 2rh$. Die Hälfte davon entspricht der Hälfte der gesuchten Laibungsfläche, die ganze Laibungsfläche ist also

$$F = 2r\frac{b}{2} = rb = \frac{db}{2}.$$

53) **Aufgabe.** Gewölberaum und Laibungsfläche einer Kappe zu berechnen.

Auflösung. Der Raum der Doppelkappe ist gleich dem Tonnenraum vermindert um die Doppelwange, also gleich

$$\frac{r^2\pi}{2}b - \frac{2}{3}r^2b = \frac{r^2b}{6}[3\pi - 4].$$

Der Raum der einfachen Kappe mit Scheitellinie $\frac{b}{2}$ ist also

$$J = \frac{r^2b}{12}[3\pi - 4] = \frac{d^2b}{48}[3\pi - 4].$$

Ebenso ist es mit der doppelten Laibungsfläche. Sie ist $r\pi b - 2rb = rb(\pi - 2)$, also ist die einfache Laibungsfläche mit Scheitellinie $\frac{b}{2}$

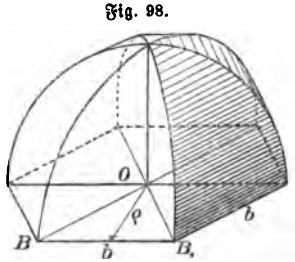
$$F = \frac{rb}{2}(\pi - 2) = \frac{db}{4}(\pi - 2).$$

54) Das schon früher besprochene regelmäßige Klostergewölbe hat cylindrische Wölbung, so daß die Mittellinien der Wölbungen Halbkreisbogen sind.

Es besteht also aus n Wangen über dem regelmäßigen n-Eck. Jede Wange hat den Raum $\frac{\varrho^2b}{3}$, wenn ϱ der an Stelle von r tretende Radius des einbeschriebenen Kreises ist. Der Gesamtraum ist also

$$J = \frac{n\varrho^2b}{3}.$$

Fig. 98.

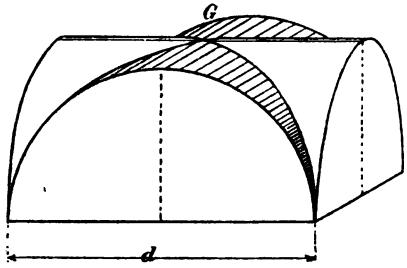


Ebenso ist es mit der gesamten Laibungsfläche. Sie ist

$$F = n\varrho b.$$

55) Figur 99 stellt das quadratische Kreuzgewölbe dar, bei dem vier kongruente Kappen mit Scheitellinie $\frac{b}{2}$ regelrecht zusammenstoßen.

Fig. 99.



Der Gewölberaum ist $\frac{4d^2b}{48}[3\pi - 4]$, oder, da $b = d$ ist,

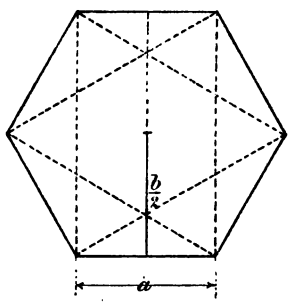
$$J = \frac{d^3}{12}[3\pi - 4].$$

Die gesamte Laibungsfläche ist

$$F = \frac{4db}{4}(\pi - 2) = d^2(\pi - 2).$$

56) Ist die Grundfläche des regelmäßigen Kreuzgewölbes ein Sechseck, so handelt es sich um 6 Kappen, jede vom Inhalte $\frac{a^2b}{48}[3\pi - 4]$, oder, da $\frac{b}{2} = a$ ist, vom Inhalte $\frac{a^3}{24}[3\pi - 4]$. Der Gesamtinhalt ist

Fig. 100.



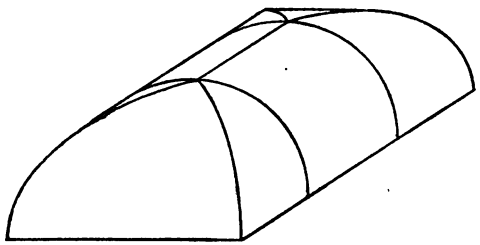
$$J = \frac{a^3}{4}[3\pi - 4].$$

Die Laibungsfläche jeder Kappe ist $\frac{ab}{4}(\pi - 2) = \frac{a^2}{2}(\pi - 2)$, die gesamte Fläche der Wölbung also

$$F = 3a^2(\pi - 2).$$

Ebenso kann man mit dem achtseitigen u. s. w. Kreuzgewölbe verfahren.

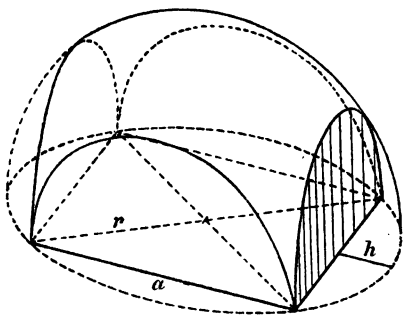
Fig. 101.



57) Setzt man an ein Tonnengewölbe die beiden Hälften eines quadratischen Klostergewölbes an, so erhält man das Muldengewölbe (Figur 101), dessen Berechnung ein einfaches Übungsbeispiel darbietet.

58) Die quadratische Hängekuppel entsteht, wenn man der Basis einer Halbkugel ein Quadrat einbeschreibt und durch die Seiten desselben senkrechte Schnittebenen legt.

Fig. 102.



Der Inhalt wird gefunden, indem man von dem Halbkugelinhalte $\frac{2}{3}r^3\pi$ vier Halbsegmente oder zwei ganze Segmente von der Pfeilhöhe

$$h = r - r\sqrt{\tfrac{1}{2}} = r\left(1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)$$

abzieht. Der ganze Segmentinhalt ist

$$\frac{\pi h^2}{3}(3r - h) = \frac{\pi r^3\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}{3}\left[3r - r + r\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right]$$
$$= \frac{r^3\pi}{3}\left(\tfrac{3}{2} - 2\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)\left(2 + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) = \frac{r^3\pi}{6}\left[4 - 5\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right].$$

Abzuziehen ist also $\frac{r^3\pi}{6}[8 - 5\sqrt{2}]$. Der Gewölberaum ist demnach

$$\tfrac{4}{6}r^3\pi - \frac{r^3\pi}{6}[8 - 5\sqrt{2}] = \frac{r^3\pi}{6}[5\sqrt{2} - 4].$$

Setzt man $a = r\sqrt{2}$ ein, so erhält man

$$J = \frac{a^3\pi}{12}[5 - 2\sqrt{2}].$$

Die Laibungsfläche ist gleich der Kugelfläche vermindert um vier Halbkalotten oder um zwei Kalotten, also gleich

$$2r^2\pi - 2 \cdot 2r\pi\left[r - r\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right] = r^2\pi[2 - 4 + 2\sqrt{2}]$$
$$= r^2\pi[2\sqrt{2} - 2] = 2r^2\pi[\sqrt{2} - 1].$$

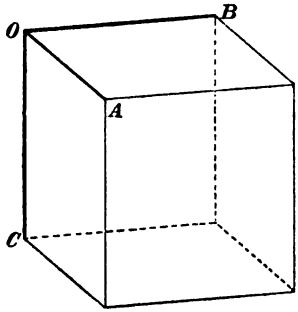
Setzt man $a = r\sqrt{2}$ ein, so folgt $a^2\pi(\sqrt{2} - 1)$.

59) Auf die Darstellung anderweitiger Gewölbeformen kann hier verzichtet werden, nur sei kurz bemerkt, daß an Stelle des Kreiscylinders überall der elliptische Cylinder treten kann, den man durch konstante Verkürzung der Senkrechten erhält. Auf gewisse paraboloische Wölbungen war schon früher hingewiesen. Die Berechnungen machen keine Schwierigkeit.

VI. Die grundlegenden Konstruktionen der orthographischen Axonometrie.

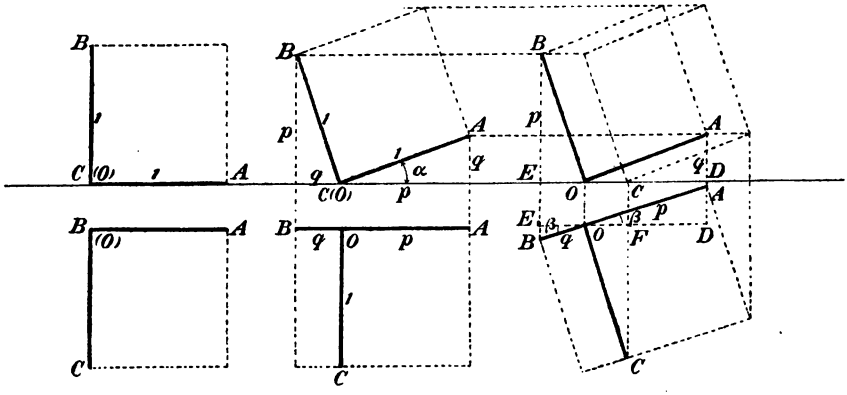
60) Durch senkrechte Projektion des Würfels erhält man eine Zeichnung nach Art von Figur 103. Von jeder Ecke gehen drei Kantenlinien aus, die, abgesehen vom Vorzeichen, mit OA, OB und OC nach Länge und Richtung übereinstimmen. Man bezeichnet drei solche Kanten, sobald sie einem Würfel angehören, als Dreibein oder Dreikant. Es wird sich nun zeigen, daß, wenn OA und OB nach Länge und Richtung gegeben sind, OC nach Länge und Richtung konstruiert werden kann, also nicht mehr willkürlich ist. Die Strecken OA, OB und OC müssen also in einer bestimmten Beziehung stehen.

Fig. 103.



61) Man findet diese Beziehung, wenn man den Würfel von der einfachsten Lage aus erst im Aufriß um einen Winkel α, dann im Grundriß um einen Winkel β dreht. (Vergl. Teil II Figur 138.)

Fig. 104.



Die in der zweiten und dritten Lage (Figur 104) mit p und q bezeichneten Stücke haben, wenn man die Würfelkante gleich 1 setzt, absolut genommen sämtlich die Länge $p = \cos\alpha$ bezw. $q = \sin\alpha$.

In der dritten Lage ist $OD = p\cos\beta = \cos\alpha\cos\beta$ (vergl. Grundriß), $OE = q\cos\beta = \sin\alpha\cos\beta$, und im Grundriß $OF = 1 \cdot \sin\beta$, also im Aufriß $OC = \sin\beta$.

62) Man betrachte nun im Aufriß der dritten Lage O als den Nullpunkt des Koordinatensystems und betrachte im Sinne der Komplexentheorie (Teil II, Abschnitt VII der Arithmetik) OA als die Summe von OD und DA, OB als die Summe von OE und EB. Dann hat man, wenn $\sqrt{-1} = i$ gesetzt wird, nach Obigem:

$$OA = \cos\alpha\cos\beta + i\sin\alpha,\quad OB = -\sin\alpha\cos\beta + i\cos\alpha,\quad OC = \sin\beta.$$

Die Quadrate der Strecken sind:

$$OA^2 = \cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta,$$
$$OB^2 = \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha - 2i\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta,$$
$$OC^2 = \sin^2\beta.$$

Die Summe der Quadrate der drei Strecken ist also gleich

$$\cos^2\beta(\sin^2\alpha + \cos^2\beta) + \sin^2\beta - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 1 - 1 = 0.$$

Folglich:

Sind die von einem Punkte O ausgehenden Kanten OA, OB und OC Würfelkanten in senkrechter Projektion, so ist die Summe der Quadrate dieser Strecken gleich Null.

(Faßt man die Quadrate der Strecken im Sinne der Mechanik als Kräfte auf, so handelt es sich um drei im Gleichgewicht stehende Kräfte.)

Dies ist der Gaußsche Fundamentalsatz der orthographischen Axonometrie, von dem sich jedoch nur im Nachlasse, Bd. II, S. 309, seiner Werke eine kurze Notiz befindet.

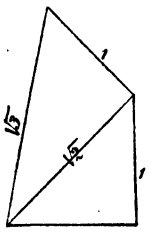
63) **Bemerkungen.** Man hätte im Aufriß noch eine vierte Lage nehmen können, indem man z. B. um einen Winkel γ drehte. Dadurch wäre jede Strecke noch mit dem Drehungsfaktor $(\cos\gamma + i\sin\gamma)$ multipliziert worden, ihr Quadrat wäre also mit $(\cos\gamma + i\sin\gamma)^2 = (\cos 2\gamma + i\sin 2\gamma)$ versehen worden. Die Summe der Quadrate hätte also wiederum Null ergeben.

Die Umkehrung würde lauten: Ist bei einem Dreibein die Summe der Streckenquadrate gleich Null, so kann es als orthographische Projektion von drei Würfelkanten gedeutet werden.

64) Es fragt sich, ob man aus dem Aufriß der Lage 3 die wahre Länge der Kanten sofort erkennen kann. Dies ist der Fall, denn es ist für diese Lage $q = \sin\alpha$, $p = \cos\alpha$, also $p^2 + q^2 = 1^2$, folglich:

Fällt man bei dem orthographischen Dreibein von dem Endpunkte zweier Kanten aus Lote auf das Bild der dritten Kante, so geben diese Lote, pythagoreisch addiert, die wahre Länge der Würfelkante.

Fig. 105.



Die Hälfte dieser Hypotenuse würde den Radius der dem Würfel einbeschriebenen Kugel geben.

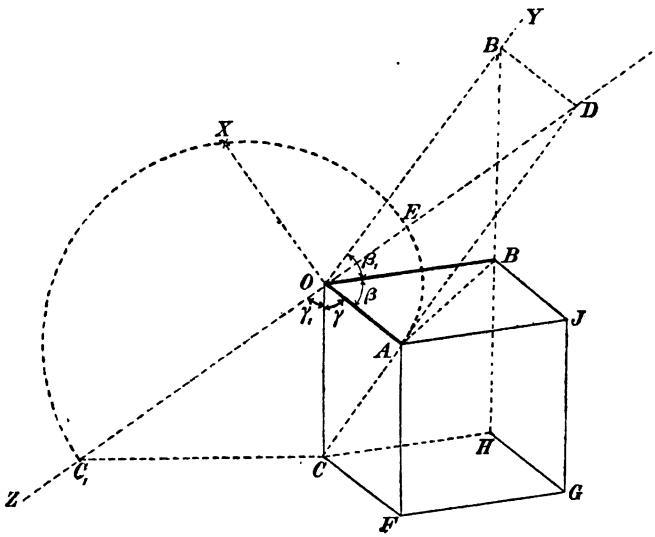
Der Durchmesser der umbeschriebenen Kugel ist $\sqrt{3}$, was nach Figur 105 z. B. pythagoreisch konstruiert werden kann. Die Hälfte ist der Radius dieser Kugel.

Schlägt man um den leicht zu konstruierenden Mittelpunkt des Würfels Kreise mit den entsprechenden Radien, so sind die beiden Kugeln korrekt dargestellt.

Jetzt ist die Lösung folgender vier Fundamentalaufgaben mit Benutzung einer einzigen Zeichnungsebene (z. B. Aufriß) möglich.

65) **Aufgabe 1.** Von einem orthographischen Dreibein seien die Kanten OA und OB nach Länge und Richtung gegeben. Die Würfelzeichnung soll fertig konstruiert werden.

Fig. 106.



Auflösung. Man lege den Winkel $AOB = \beta$ in O an OB an, den Winkel OAB in B an dieselbe Gerade, so daß $\triangle OBB_1$

$\sim \triangle OAB$ wird. Aus OA und OB_1 bilde man das Parallelogramm $OADB_1$, ziehe dessen Diagonale DB und verlängere sie über O hinaus um sich selbst, was C_1 giebt. Man halbiere den Winkel AOC_1, dann erhält man die Richtung der dritten Kante. Macht man ihre Länge gleich der mittleren Proportionale zwischen OA und OC_1, so ist OC vollständig bestimmt. Die Würfelzeichnung ist leicht zu vollenden.

Beweis. Faßt man OA als die reelle Strecke 1 oder auch 1^2 auf, so ist nach Obigem OB_1 das Quadrat der Strecke OB nach Länge und Richtung. Ist nämlich $OB = r(\cos\beta + i\sin\beta)$, so ist $OB_1 = r^2(\cos\beta + i\sin\beta)^2 = r^2(\cos 2\beta + i\sin 2\beta)$. In derselben Weise ist OC_1 das Quadrat von OC. Da aber $C_1O = OD$ die Diagonale des Parallelogramms ist, so ist die Summe der Strecken OA_1, OB_1 und OC_1 = Null. Folglich bilden ihre Quadratwurzeln OA, OB und OC ein orthographisches Dreibein.

Bemerkung. Statt den concaven Winkel AOC_1 zu halbieren, konnte man es auch mit dem convexen Winkel thun, dann wäre OC entgegengesetzt entstanden, was dem zweiten Wurzelwerte entspricht.

Die beiden Lösungen sind im übrigen nicht von einander verschieden. Jede läßt zwei Deutungen zu, je nachdem man A oder H als vornliegend auffaßt.

In der Konstruktion lassen sich einige Linien ersparen, die des Beweises wegen mit gezeichnet sind.

[Selbstverständlich kann man OC auch durch Berechnung finden. Es ist nämlich

$$OB_1 = \frac{OB^2}{OA}, \quad OD = \sqrt{OB_1{}^2 + OA^2 + 2OB_1 \cdot OA \cdot \cos 2\beta},$$

$$OC = \sqrt{OA \cdot OD}, \quad \sin AOD = \frac{OB_1}{OD}\sin 2\beta,$$

endlich Winkel γ die Hälfte des zugehörigen Supplementwinkels AOC_1.]

66) **Aufgabe 2.** *OA sei nach Länge und Richtung gegeben, die Kanten OB und OC nur der Länge nach. Die Würfelzeichnung soll vollendet werden.*

Auflösung. Man konstruiere die Länge OB^2 und OC^2 mit Hülfe der Proportionen

$$OA : OB = OB : x \quad \text{und} \quad OA : OC = OC : x_1,$$

wo $OA = 1$ gesetzt ist. Aus $OA = 1^2$, $OB_1 = OB^2$ und $OC_1 = OC^2$ konstruiere man das Parallelogramm $OADB_1$ nebst Diagonale. Halbierung des Winkels AOB_1 giebt die Richtung von OB, Halbierung des Nebenwinkels AOC_1 von AOD giebt die Richtung von OC, u. s. w.

67) **Aufgabe 3.** *OA* sei nach Länge und Richtung gegeben, die Kanten *OB* und *OC* nur der Richtung nach. Die Würfelzeichnung ist zu vollenden.

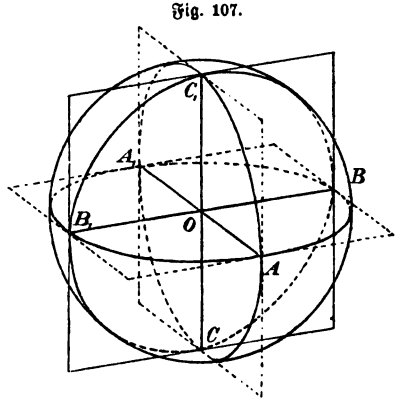
Auflösung. Man verdoppele die gegebenen Winkel β und γ. Dadurch erhält man die Richtung der Seite OB_1 und der Diagonale *OD* des Parallelogramms $OADB_1$, welches leicht zu vollenden ist. Die mittlere Proportionale zwischen *OA* und OB_1 giebt die Länge von *OB*, die mittlere Proportionale zwischen *OA* und OC_1 die Länge von *OC*.

68) **Aufgabe 4.** *OA* sei nach Länge und Richtung gegeben, von der Kante *OB* die Länge, von der Kante *OC* die Richtung. Die Würfelzeichnung ist zu vollenden.

Auflösung. Verdoppelung des gegebenen Winkels γ giebt wieder die Diagonalrichtung des zu konstruierenden Parallelogramms $OADB_1$, welches dadurch vollendet wird, daß man um *A* einen Bogen mit OB^2 schlägt. Letzteres ist, wie vorher, mit Hülfe der Proportion $OA : OB = OB : x$ zu konstruieren. Ist das Parallelogramm vollendet, so giebt die Halbierung des Winkels AOB_1 die Richtung von *OB*. Die Länge von *OC* ergiebt sich als mittlere Proportionale zwischen *OA* und der Diagonale *OD*.

69) **Übungs-Aufgaben.** Ist der Würfel in allgemeiner Lage konstruiert, so kann man nach Obigem die ein- und die umbeschriebene Kugel durch den entsprechenden Kreis darstellen. Man kann ihm ein Tetraeder oder Oktaeder einbeschreiben, ein Pentagondodekaeder um ihn legen, ein Ikosaeder aus dem letzteren ableiten und so auch diese Gestalten direkt in allgemeiner Lage darstellen, ohne zwei Ebenen zu benutzen. Auch das Trapezoeder und das Diamantoeder lassen sich aus dem zum Achsenkreuze vervollständigten Dreibein ableiten, überhaupt sämtliche Kryſtallformen mit senkrecht aufeinander stehenden Achsen.

Fig. 107.



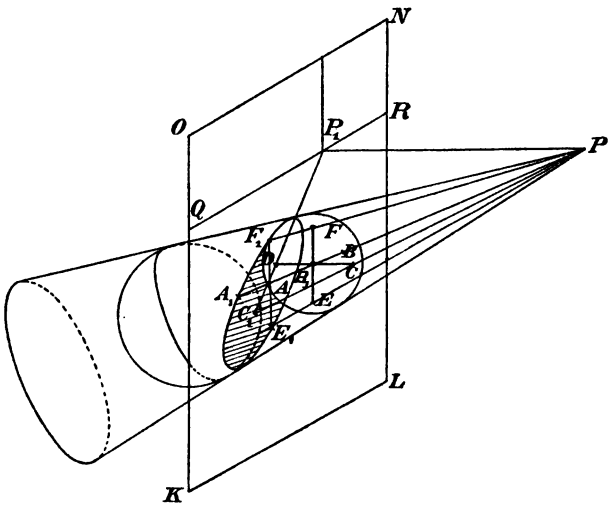
70) Schlägt man um die Ecke des Dreibeins einen Kreis mit der wirklichen Kantenlänge,

die nach dem Obigen zu konstruieren ist, so erkennt man die Möglichkeit der korrekten Konstruktion sphärischer Dreiecke mit Bogen von je 90^0, d. h. der Kugeloktanten in allgemeiner Lage. Man braucht AA_1, BB_1 und CC_1 nur als Mittellinien gewisser Parallelogramme zu betrachten, denen die entsprechenden Ellipsen einzubeschreiben sind. Die letzteren lassen sich nach Pascal oder Brianchon sogar ohne Hülfe des Zirkels konstruieren. Vergl. z. B. Figur 8.

VII. Die Kugel in centralperspektivischer Projektion.

71) $KLNO$ sei eine senkrechte Ebene, auf der eine Berührungskugel liegt. In P befinde sich das Auge, so daß die Projektion P_1 von P der Augenpunkt und die Horizontale QR der Horizont ist. Der von P aus an die Kugel gelegte Berührungskegel schneidet die Ebene in einem Kegelschnitte, z. B. in einer Ellipse, die als Projektion

Fig. 108.



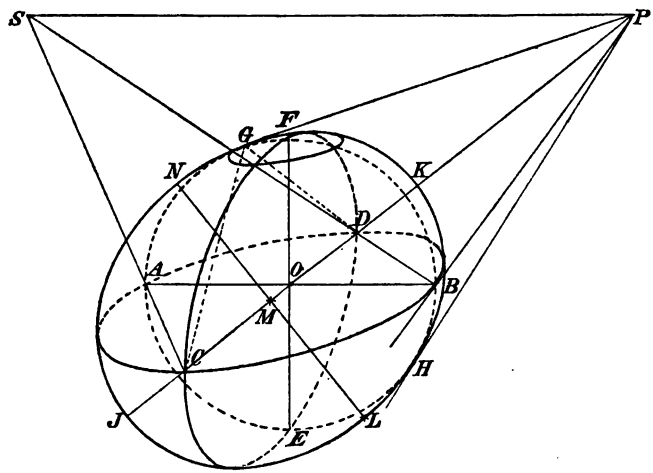
der Kugel zu betrachten ist. Die Kugel ist die eine Daudelinsche Berührungskugel, berührt also die Ebene im Brennpunkte D der Ellipse. Ist DC ein Lot auf der Ebene und C der Schnittpunkt desselben mit der Kugel, so giebt, wie die zweite Berührungskugel zeigt, PC den anderen Brennpunkt C_1 der Ellipse. Die durch P und DC ge-

legte Ebene steht auf der Zeichnungsebene $KLNO$ senkrecht, muß also auch durch P_1 gehen. Folglich: Die Verbindungslinie der Ellipsenbrennpunkte geht durch den Augenpunkt P_1. Ist nun z. B. EF der senkrechte Kugeldurchmesser, AB der horizontale, zu CD und EF senkrechte, der, wie EF, zur Ebene $KLNO$ parallel ist, so ist durch die Projektionen A_1B_1, C_1D_1, E_1F_1 die Zeichnung des Hauptachsenkreuzes der Kugel für diese Art von Perspektive bestimmt.

72) Daraus ergiebt sich für die Centralperspektive folgende einfache Konstruktion der dem Achsenkreuze umbeschriebenen Kugel:

Durch AB, CD, FF sei das Achsenkreuz in der Hauptlage dargestellt, wobei $CO > OD$ sein soll, wie es der Centralperspektive entspricht. CA und BD geben den sogenannten Distanzpunkt S,*)

Fig. 109.



die Horizontale durch S giebt den Horizont der Zeichnung, CD giebt in der Horizontlinie den Augenpunkt P. Um O schlage man mit dem Radius OA den einen Hauptkreis der Kugel und ziehe von P aus an diesen Kreis die Tangenten PG (und PH). Die Summe $CG + GD$ giebt die große Achse der zu zeichnenden Ellipse,

*) Vgl. des Verfassers „Einführung in das stereometrische Zeichnen", Kap. III.

die mit Hülfe des Halbierungspunktes M von CD leicht als JK zu zeichnen ist. C und D sind die Brennpunkte der Umriß-Ellipse.

Daß die Berührungspunkte G und H der Tangenten maßgebend sind, ergiebt sich daraus, daß der Hülfskreis von jedem Horizontalkreise der Kugel so geschnitten wird, daß dessen Tangente im Schnittpunkte nach P hin gerichtet ist. Der zu G gehörige Horizontalkreis hat also mit dem Hülfskreise die gemeinschaftliche Tangente GP und den gemeinschaftlichen Berührungspunkt G. Demnach muß in G die Berührung des Hülfskreises mit der zu konstruierenden Ellipse erfolgen.

Die Zeichnung stellt auch noch die zur Konstruktion nicht nötigen Kreise $ADBC$ und $CFDE$ dar.

73) Für den Fall der schrägen Parallelperspektive fällt M mit O zusammen, und das Lot MN auf der Achse CD schneidet den Hauptkreis im Berührungspunkte G, der jetzt mit N zusammenfällt. Man hat damit sofort die kleinere Halbachse der Ellipse mit den Brennpunkten C und D.

Dritte Abteilung.
Sphärische Trigonometrie.

I. Vorbemerkungen.

1) Die sphärische Trigonometrie beschäftigt sich mit den von größten Kreisen auf der Kugelfläche gebildeten Dreiecken. Es handelt sich darum, in ähnlicher Weise wie in der ebenen Trigonometrie, zwischen den Seiten und den Winkeln und der Fläche Beziehungen aufzustellen, die es ermöglichen, alle Elemente des Dreiecks aus gegebenen Stücken zu berechnen. Einiges davon ist schon in Teil II (Stereometrie Nr. 50 und Anhang 1) zur Sprache gekommen. Auch die Lehre von den dreikantigen Ecken gehört hierher, denn die nach den Ecken eines Kugeldreiecks gezogenen Radien bilden solche Ecken. Die Lehre von der Kongruenz und Symmetrie der Dreikant-Ecken findet hier ihren Abschluß.

Die ebene Trigonometrie muß als besonderer Fall in der sphärischen enthalten sein. Denkt man sich nämlich bei endlichem Radius die sphärischen Dreiecke unendlich klein, so ist ihre Krümmung eine verschwindend kleine. Dasselbe ist der Fall, wenn man sich bei sphärischen Dreiecken von endlicher Größe den Kugelradius unendlich groß denkt. Auf das Ineinanderübergehen der Formeln für Kugel und Ebene soll stets aufmerksam gemacht werden.

Die Ecken der sphärischen Dreiecke mögen stets mit A, B, C, die zugehörigen Winkel mit α, β, γ, die gegenüberliegenden Seiten mit a, b, c bezeichnet werden.

Dreiecke mit überstumpfen Winkeln ($> 180^0$) und mit Bogen, die größer als $r\pi$ sind, sollen ausgeschlossen werden, denn an ihrer Stelle können konvexe Nebendreiecke behandelt werden, die also den Bedingungen ($< 180^0$ bezw. $< r\pi$) genügen. Im allgemeinen geben nämlich drei größte Kugelkreise acht Dreiecke (vergl. Figur 154 in Teil II), unter denen geeignete aufzufinden sind.

Die Entwickelungen werden besonders einfach, wenn man den Kugelradius $r = 1$ setzt. Aus Gründen der Anschaulichkeit soll dies im Anfange unterlassen werden. Ist es nötig, den zum Radius r gehörigen Bogen von dem zum Radius 1 gehörigen zu unterscheiden, so soll im letzteren Falle statt a, b, c geschrieben werden $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

Unter Dreieck soll hier stets ein sphärisches Dreieck verstanden werden.

2) Die Figuren machen nur dann einen wirklich körperlichen Eindruck, wenn man die ganze Kugel mitzeichnet.

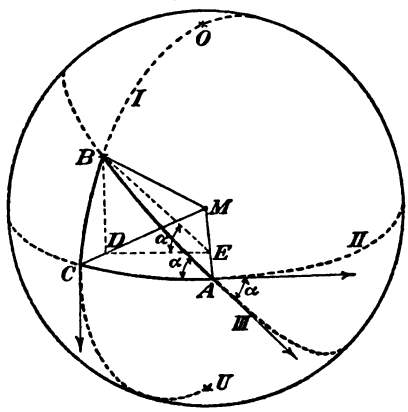
Da die Kugel bei der senkrechten Projektion stets als Kreis erscheint, bei der Schrägprojektion dagegen als Ellipse, so ist es hier zweckmäßig, von der letzteren Darstellungsweise abzugehen und die erstere zu wählen.

Die größten Kreise der Kugel erscheinen als Ellipsen, die sich dem Grenzkreise der Figur berührend anschmiegen, also nicht derartig auf ihn treffen, daß die Verlängerung den Grenzkreis schneiden würde. Mit Ausnahme der als gerade Linien erscheinenden Kreise, die senkrecht auf den Grenzkreis treffen, bilden sämtliche im Bilde mit dem Grenzkreise den Winkel Null, möge der wirkliche Schnittwinkel so groß sein, wie er wolle. Sollen die Schnittwinkel der Seiten sphärischer Dreiecke sichtbar werden, so hat man den Grenzkreis als Dreiecksseite zu vermeiden.

II. Rechtwinklige sphärische Dreiecke.

3) Figur 110 stellt eine Kugel mit drei größten Kreisen dar. Man denke sich Kreis I als Meridian, der durch den obersten Punkt O und den untersten Punkt U geht, den Kreis II als den horizontalen Äquator, so daß der Schnitt bei C einen rechten Winkel giebt. Dagegen habe Kreis III eine beliebige schräge Lage. Dann ist ABC ein sphärisches Dreieck, und zwar ein rechtwinkliges, bei dem man die

Fig. 110.



Bogen a und b als Katheten, c als Hypotenuse bezeichnen darf. An der Figur ist noch Folgendes zu beachten: B ist senkrecht nach unten auf die Äquatorebene projiziert, was den Punkt D auf dem Radius MC gegeben hat. Außerdem ist von B aus das Lot BE auf den Radius MA gefällt, so daß BED ein senkrecht stehendes rechtwinkliges Dreieck ist, welches den Neigungswinkel α' der Geraden BE gegen die Äquatorialebene enthält. Denselben Neigungswinkel geben aber auch die in A berührenden Tangenten der sich in A schneidenden Kreise an, denn ED und EB sind zu diesen Tangenten parallel, und so ist $\alpha' = \alpha$.

Nach diesen Vorbereitungen sollen die Hauptaufgaben über das rechtwinklige Kugeldreieck gelöst werden. Dabei mögen die Winkel BMC, CMA und AMB als a, b, c bezeichnet, also durch den Bogen gemessen werden.

4) **Aufgabe.** Aus den Katheten a und b die Hypotenuse c zu berechnen.

Auflösung. Es ist

$$\cos c = \cos BME = \frac{ME}{MB} = \frac{MD \cdot \cos DME}{MB} = \frac{MD \cdot \cos b}{MB}$$

$$= \frac{(MB \cdot \cos DMB) \cos b}{MB} = \cos a \cdot \cos b.$$

Also:

1) $$\cos c = \cos a \cdot \cos b.$$

Bei der Schreibweise $\lg \cos^2 c = \lg \cos^2 a + \lg \cos^2 b$ fällt eine gewisse Analogie mit dem Satze des Pythagoras besser ins Auge. Der Satz ist leicht in Worten auszudrücken.

Bemerkungen. Durch eine geringe Änderung der Figur läßt sich der Satz auch für $\hat{a} > \frac{\pi}{2}$ und ebenso für $\hat{a} > \frac{\pi}{2}$ und zugleich $\hat{b} > \frac{\pi}{2}$ beweisen. Dann läßt sich Folgendes aussprechen:

a) Ist $\hat{a} < \frac{\pi}{2}$ und $\hat{b} < \frac{\pi}{2}$, so sind die beiden Faktoren positiv, also auch $\cos c$ positiv und daher $\hat{c} < \frac{\pi}{2}$.

b) Ist $\hat{a} > \frac{\pi}{2}$ und $\hat{b} > \frac{\pi}{2}$, so sind die beiden Faktoren negativ, folglich $\cos c$ positiv und $\hat{c} < \frac{\pi}{2}$. Also können nicht alle drei Bogen zugleich größer als $\frac{\pi}{2}$ sein.

c) Ist $\hat{a} > \frac{\pi}{2}$ und $\hat{b} < \frac{\pi}{2}$, so ist $\cos c$ negativ und $\hat{c} > \frac{\pi}{2}$.

d) Ist einer der Bogen a und b gleich $\frac{\pi}{2}$, so ist einer der Faktoren Null, folglich auch $\cos c = 0$, d. h. auch $\widehat{c} = \frac{\pi}{2}$. Das Dreieck ist gleichschenklig und bildet ein halbes Meridianzweieck.

e) Ist $\widehat{a} = \frac{\pi}{2}$ und $\widehat{b} = \frac{\pi}{2}$, so sind beide Faktoren gleich Null, folglich auch $\widehat{c} = \frac{\pi}{2}$. Das Dreieck ist gleichseitig und bildet einen Oktanten der Kugel.

Anwendung. Wie groß ist auf der Erdoberfläche die sphärische Entfernung eines Punktes B von a^0 nördlicher Breite von einem Punkte A des Äquators, wenn der Unterschied der geographischen Länge b^0 beträgt?

Auflösung. Aus $\lg\cos a^0 + \lg\cos b^0$ bestimmt man $\lg\cos c^0$, sucht c^0 mit Hülfe der Tafeln auf und multipliziert die Anzahl der Grade mit 15, was die Zahl der Meilen für c giebt. — Handelt es sich um einen Weltkörper vom Radius r, so bestimmt man $\widehat{c}$ aus der Proportion $c^0 : 180^0 = \widehat{c} : \pi$ als $\widehat{c} = \pi\frac{c^0}{180^0}$, so daß der sphärische Abstand als $r\widehat{c} = r\pi\frac{c^0}{180^0}$ gefunden wird.

5) **Aufgabe.** Einen Dreieckswinkel aus der Gegenkathete und der Hypotenuse zu berechnen.

Auflösung. In Figur 110 ist

$$\sin\alpha = \sin\alpha' = \frac{DB}{EB} = \frac{MB\cdot\sin a}{MB\cdot\sin c} = \frac{\sin a}{\sin c}.$$

Also:

2) $$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c'},\quad \sin\beta = \frac{\sin b}{\sin c}.$$

Auch bei dem ebenen rechtwinkligen Dreiecke führen Gegenkathete und Hypotenuse auf den Sinus des Winkels. Für kleines a und c wird auch hier $\sin\alpha = \frac{a}{c}$.

Anwendung. Welche Winkel hat in der vorigen geographischen Aufgabe das sphärische Dreieck? Um wieviel übertrifft die Winkelsumme den Winkel 180^0? (Sphärischer Überschuß oder Exceß.) Wie groß ist demnach die Fläche des Dreiecks? [Vergl. Teil II, Stereometrie Nr. 50:

$$F = \frac{\alpha^0+\beta^0+\gamma^0-180^0}{720^0}\,O = \frac{\alpha^0+\beta^0+\gamma^0-180^0}{180^0}\,r^2\pi$$
$$= (\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}+\widehat{\gamma}-\pi)r^2.]$$

6) **Aufgabe.** Einen Dreieckswinkel aus der anliegenden Kathete und der Hypotenuse zu berechnen.

Auflösung. In Figur 110 ist

$$\cos\alpha = \cos\alpha' = \frac{ED}{EB} = \frac{ME \cdot \tan b}{ME \cdot \tan c} = \frac{\tan b}{\tan c}.$$

Also

3) $$\cos\alpha = \frac{\tan b}{\tan c}, \quad \cos\beta = \frac{\tan a}{\tan c}.$$

Der Satz entspricht der Cosinus-Formel für das ebene rechtwinklige Dreieck. Für kleinen Bogen b und c wird auch hier $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

7) **Aufgabe.** Einen Dreieckswinkel aus den beiden Katheten zu berechnen.

Auflösung. Nach 2) und 3) ergiebt sich durch Division

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin a}{\sin c} \cdot \frac{\tan c}{\tan b} = \frac{\sin a}{\sin c} \cdot \frac{\sin c}{\cos c} \cdot \frac{1}{\tan b} = \frac{\sin a}{\cos c \tan b}$$

$$= \frac{\sin a}{(\cos a \cos b) \tan b} = \frac{\tan a}{\cos b \tan b} = \frac{\tan a}{\sin b}.$$

Also

4) $$\tan\alpha = \frac{\tan a}{\sin b}, \quad \tan\beta = \frac{\tan b}{\sin a}.$$

Auch in der ebenen Trigonometrie führen die beiden Katheten auf die Tangente des Winkels. Für kleinen Bogen a und b wird auch hier $\tan\alpha = \frac{a}{b}$.

Aufgabe. Die Dreiecksseiten aus den Winkeln zu berechnen.

Auflösung. Aus

$$\cos\alpha = \frac{\tan b}{\tan c} \quad \text{und} \quad \sin\beta = \frac{\sin b}{\sin c}$$

(vgl. 3) und 2)) folgt durch Division

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = \frac{\tan b}{\tan c} \cdot \frac{\sin c}{\sin b} = \frac{\cos c}{\cos b} = \frac{\cos a \cos b}{\cos b} = \cos a,$$

also ist zunächst

5) $$\cos a = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}, \quad \cos b = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}.$$

(Für unendlich kleines a geht die Formel über in $1 = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$ oder $\cos\alpha = \sin\beta$, was der ebenen Trigonometrie entspricht.)

Durch Multiplikation folgt aus beiden Gleichungen

$$\cos c = \cos a \cos b = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} = \cot \alpha \cot \beta .$$

Also:

6) $$\cos c = \cot \alpha \cot \beta .$$

(Für unendlich kleines c wird daraus $1 = \cot \alpha \cot \beta$ oder $\tan \alpha = \cot \beta$, was wiederum der ebenen Trigonometrie entspricht.)

8) Um das Gedächtnis zu unterstützen, hat Neper die sechs Grundformeln zu folgenden, aus ihnen leicht abzuleitenden, vereinigt:

7)
$$\begin{cases} \cos c & = \cot \alpha \cot \beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right), \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) & = \cot \beta \cot\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin \alpha \sin c, \\ \cos \alpha & = \cot\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \cot c = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin \beta . \end{cases}$$

Es handelt sich dabei für jeden Cosinus um dieselben Funktionen, und zwar in folgendem Sinne: Man denke sich die Elemente a, b, c, α und β (aber $\gamma = 90^0$ ausgeschlossen) in der naturgemäßen Reihenfolge kreisförmig aufgeschrieben, statt der Katheten a und b aber ihre Supplemente $\frac{\pi}{2} - a$ und $\frac{\pi}{2} - b$ gesetzt. Jeder Cosinus ist dann gleich dem Produkte aus den Cotangenten der beiden anliegenden Stücke, aber auch gleich dem Produkte aus dem Sinus der abgetrennt liegenden Stücke.

Fig. 111.

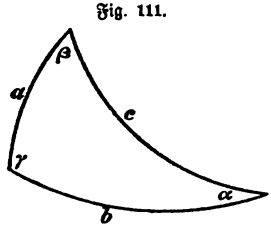
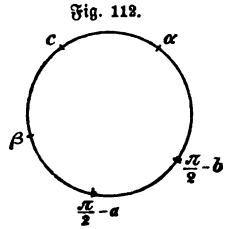


Fig. 112.



9) Mit diesen Grundformeln lassen sich die folgenden Aufgaben lösen.

a) Gegeben a und b; wie groß sind c, α, β und F?

Auflösung.

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b; \quad \tan \alpha = \frac{\tan a}{\sin b}, \quad \tan \beta = \frac{\tan b}{\sin a},$$

$$F = \frac{\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 - 180^0}{180^0} r^2 \pi .$$

b) Gegeben a und c; wie groß sind b, α, β und F?

Auflösung.

$$\cos b = \frac{\cos c}{\cos a}, \quad \sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}, \quad \cos \beta = \frac{\tan a}{\tan c}, \quad F \text{ wie oben.}$$

c) Gegeben a und β, wie groß sind α, b, c und F?

Auflösung.

$$\cos \alpha = \cos a \cdot \sin \beta, \quad \tan b = \sin a \cdot \tan \beta, \quad \tan c = \frac{\tan a}{\cos \beta},$$

F wie oben.

d) Gegeben a und α; wie groß sind β, b, c und F?

Auflösung.

$$\sin \beta = \frac{\cos \alpha}{\cos a}, \quad \sin b = \frac{\tan a}{\tan \alpha}, \quad \sin c = \frac{\sin a}{\sin \alpha}, \quad F \text{ wie oben.}$$

e) Gegeben c und α, wie groß β, b, a und F?

Auflösung.

$$\cot \beta = \cos c \cdot \tan \alpha, \quad \tan b = \tan c \cdot \cos \alpha, \quad \sin a = \sin c \cdot \sin \alpha.$$

f) Gegeben α und β, gesucht a, b, c und F.

Auflösung.

$$\cos a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}, \quad \cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}, \quad \cos c = \cot \alpha \cot \beta.$$

10) **Bemerkungen.** Es fragt sich, ob in den Auflösungen, abgesehen von den Fällen der Symmetrie, die keine Kongruenz ist, Mehrdeutigkeit herrschen kann. Bei dem Cosinus und der Tangente bestimmt sich der Quadrant aus dem Vorzeichen, also sind die Lösungen eindeutig, bei denen der Cosinus oder die Tangente der Unbekannten gefunden werden. Dagegen könnten die Sinus der gesuchten Größen sowohl auf den ersten, als auch auf den zweiten Quadranten führen. Nun ist aber nach Formel 4) $\sin a = \frac{\tan b}{\tan \beta}$ und $\sin b = \frac{\tan a}{\tan \alpha}$. Da nun der Sinus in den beiden ersten Quadranten stets positiv ist, so muß $\frac{\tan b}{\tan \beta}$ und ebenso $\frac{\tan a}{\tan \alpha}$ stets positiv sein, d. h. Zähler und Nenner sind beide zugleich positiv und beide zugleich negativ, folglich: *Kathete und Gegenwinkel gehören stets demselben Quadranten an.* Dies kann auch sofort aus der Figur entnommen werden, indem man bei gegebenem α den Maximalwert von a untersucht, der gleich $r\widehat{\alpha} = r\pi \frac{\alpha^0}{180^0}$ ist. So ist

z. B. in der zweiten Aufgabe die Lösung $\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}$ eindeutig, weil der Quadrant von α durch den Quadranten von a bestimmt wird.

Nur bei Aufgabe 4, wo Kathete und Gegenwinkel gegeben sind, bleibt die Zweideutigkeit bei allen Stücken bestehen, giebt aber nicht acht Möglichkeiten, sondern nur zwei, weil eben gewisse Quadranten zusammengehören.

Bei derselben Aufgabe kann auch eine Unmöglichkeit eintreten. Ist nämlich $\sin a > \sin\alpha$ gegeben, so wird $\sin c = \frac{\sin a}{\sin\alpha} > 1$, was unmöglich ist. Der Grenzfall $\sin a = \sin\alpha$ führt auf $\sin c = 1$, d. h. auf $\widehat{c} = \frac{\pi}{2}$. Ist $\widehat{a} = \frac{\pi}{2}$ und $\alpha = 90^0$ gegeben, so ist das Dreieck unbestimmt, nämlich gleich der oberen oder unteren Hälfte eines beliebigen Kugelzweiecks, welches zwischen zwei Meridianen liegt. Soll es bestimmt werden, so muß noch ein drittes Stück gegeben sein.

Mit dem rechtwinkligen Dreiecke sind zugleich die gleichschenkligen erledigt, denn jedes läßt sich durch einen größten Kreis in symmetrische rechtwinklige Dreiecke zerlegen.

III. Allgemeine sphärische Dreiecke.

11) **Aufgabe.** Das Analogon des Sinus-Satzes der ebenen Geometrie zu finden.

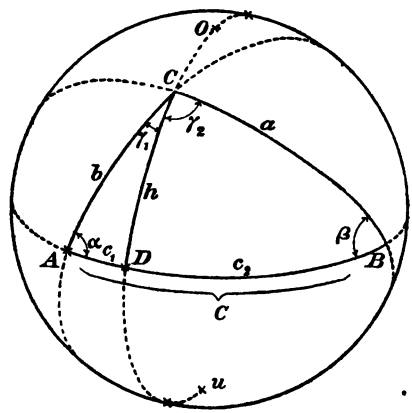
Auflösung. In Figur 113 sei ABC das sphärische Dreieck. Man lege durch C einen ebenen Hauptschnitt senkrecht zur Äquatorialebene AB, der den Bogen $\widehat{CD} = h$ senkrecht zu AB giebt. Dann ist nach Formel 2

$$\sin\alpha = \frac{\sin h}{\sin b'}, \quad \sin\beta = \frac{\sin h}{\sin a'},$$

folglich durch Division

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin a}{\sin b'},$$

Fig. 113.



und allgemeiner

8*) $$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \sin a : \sin b : \sin c,$$

d. h. die Sinus der Winkel verhalten sich wie die der gegenüberliegenden Seiten.

Bemerkungen. Die Figur ist nur wenig zu verändern, wenn einer der Winkel α und β stumpf ist. Sind beide stumpf, so untersucht man das Nebendreieck mit spitzen Winkeln. (Für kleine Bogen entsteht die Formel für ebene Dreiecke $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c$.)

Aufgabe. Die Seite a aus b, c und α zu berechnen und so das Analogon des Cosinus-Satzes zu finden.

Auflösung 1. Sie befindet sich in Teil II, Anhang 1). Man kann die dortige Figur dadurch darstellen, daß man Tangenten im Gegenpunkte der gesuchten Seite anbringt.

Auflösung 2. In Figur 113 ist nach Formel 1)

$$\cos a = \cos h \cos c_2 = \cos h \cos(c - c_1)$$
$$= \cos h\,[\cos c \cos c_1 + \sin c \sin c_1] = \cos h \cos c \cos c_1 + \cos h \sin c \sin c_1.$$

Nach Formel 1) ist $\cos h \cos c_1 = \cos b$, und nach Formel 2) $\sin\gamma_1 = \frac{\sin c_1}{\sin b}$, also $\sin c_1 = \sin b \sin\gamma_1$. Beides eingesetzt giebt

$$\cos a = \cos b \cos c + \cos h \sin c \sin b \sin\gamma_1.$$

Nun ist aber nach Formel 5) $\cos h = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma_1}$, also $\cos h \sin\gamma_1 = \cos\alpha$. Einsetzung giebt

9) $$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha.$$

Für Dreiecke mit stumpfen Winkeln bezw. Seiten ist die Figur entsprechend zu ändern, gegebenenfalls sind Nebendreiecke zu behandeln. Wie lautet der Satz in Worten?

Jeder Winkel berechnet sich also aus den Seiten mit Hülfe der Formel

9*) $$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Später werden jedoch bessere Methoden für logarithmische Auswerthung gegeben.

13) Nach Teil II, Stereometrie Nr. 15 sind die Seiten jeder Ecke die Supplemente der Winkel der Polarecke, die Winkel der ersteren sind die Supplemente zu den Seiten der letzteren. Aus den

Formeln für die Winkel lassen sich demnach sofort Formeln für die Seiten ableiten. So kann z. B., wenn die Seiten des Polardreiecks a_1, b_1, c_1, die Winkel α_1, β_1, γ_1 genannt werden, Formel 9 in folgender Form geschrieben werden:

$$\cos(2\pi - \alpha_1) = \cos(2\pi - \beta_1)\cos(2\pi - \gamma_1) + \sin(2\pi - \beta_1)\sin(2\pi - \gamma_1)\cos(2\pi - a_1),$$

oder

$$-\cos\alpha_1 = (-\cos\beta_1)(-\cos\gamma_1) + \sin\beta_1 \sin\gamma_1 (-\cos a_1).$$

Folglich gilt ganz allgemein die Formel

10) $$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a,$$

10*) $$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

So hat man in 9*) den **Cosinussatz zur Berechnung des Winkels**, und in 10*) den **Cosinussatz zur Berechnung der Seite**.

14) Mit Hülfe dieser Formeln könnte man jedes sphärische Dreieck aus drei Stücken berechnen, wenn sie nicht unbequem zur logarithmischen Auswertung wären. Außerdem würde, wenn man z. B. aus a, b und α den Winkel β berechnet hat, für c die Formel $\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha$ anzuwenden sein, die c in zwei verschiedenen Funktionen enthält, so daß z. B. statt $\cos c$ geschrieben werden müßte $\sqrt{1 - \sin^2 c}$. Dies ist zu unbequem.

Eine bessere Formel zur Berechnung von c ergiebt sich folgendermaßen. Aus dem Cosinussatze folgen die Gleichungen

$$\cos a - \cos b\cos c = \sin b\sin c\cos\alpha,$$
$$\cos b - \cos c\cos a = \sin c\sin a\cos\beta,$$

folglich durch Addition

$$(\cos a + \cos b)(1 - \cos c) = \sin c(\sin b\cos\alpha + \sin a\cos\beta)$$

oder nach bekannten Formeln

$$2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\cdot 2\sin^2\frac{c}{2} = 2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}(\sin b\cos\alpha + \sin a\cos\beta),$$

oder nach beiderseitiger Division durch $2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}$:

$$2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\tan\frac{c}{2} = \sin b\cos\alpha + \sin a\cos\beta.$$

Schon diese Formel würde ausreichen. Sie wird aber logarithmisch bequemer, wenn man nach dem Sinussatze $\sin b$ durch $\frac{\sin a \sin \beta}{\sin \alpha}$ ersetzt. Dies giebt

$$2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \tan \frac{c}{2} = \frac{\sin a \sin \beta}{\sin \alpha} \cos \alpha + \sin a \cos \beta$$
$$= \frac{\sin a}{\sin \alpha} [\sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha]$$
$$= \frac{\sin a}{\sin \alpha} \sin (\alpha + \beta).$$

Daraus folgt die brauchbarere Formel

11) $$\tan \frac{c}{2} = \frac{\sin a}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin (\alpha + \beta)}{2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}.$$

Ganz ebenso folgt aus dem Cosinussatze zur Berechnung der Seiten

11*) $$\cot \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin \alpha}{\sin a} \cdot \frac{\sin (a+b)}{2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}},$$

was sich auch nach obiger Methode mit Hülfe des Polardreiecks sofort aus 11) ableiten läßt. Aus diesen Formeln läßt sich auch das Analogon des Tangentensatzes der ebenen Trigonometrie ableiten, was jedoch später auf andere Art geschehen soll.

Vorläufig handelt es sich nur darum, zu zeigen, daß schon jetzt für sämtliche Hauptfälle die Berechnung von sphärischen Dreiecken ermöglicht ist, wenn auch nicht auf geschicktem Wege. Außerdem kann jetzt die wichtige Frage zur Erledigung kommen, unter welchen Bedingungen die zu lösenden Aufgaben keine, eine oder zwei Lösungen zulassen. Damit wird für Schulen, die der sphärischen Trigonometrie nur wenig Zeit widmen können, ein vorläufiger Abschluß erreicht.*)

IV. Übungsaufgaben für die vorläufige Berechnungsmethode.

15) a) Gegeben a, b, c, gesucht die Winkel α, β, γ.

Auflösung. $\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$ und die daraus durch cyklische Vertauschung entstehenden Formeln.

Beispiel. Aus $a = 50^0$, $b = 110^0\,9'$, $c = 78^0\,12'$ folgt $\alpha = 39^0\,1'\,50''$, $\beta = 50^0\,30'\,24''$, $\gamma = 53^0\,34'\,26''$.

*) Das Realgymnasium z. B. kann hier abbrechen.

Aus dem sphärischen Überschuß ist die Fläche als

$$F = \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma - 180^0}{180^0}\right)\pi$$

für den Radius 1 zu berechnen, für r ist dies mit r^2 zu multiplizieren.

b) Gegeben α, β, γ, gesucht a, b, c.

Auflösung. $\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$ und die cyklisch dazu gehörigen Formeln.

Beispiel. Aus $\alpha = 75^0\,58'$, $\beta = 82^0\,10'$, $\gamma = 50^0\,36'$ folgt $a = 64^0\,7'\,52''$ u. s. w.

c) Gegeben a, b und der Gegenwinkel β.

Auflösung. $\sin\alpha = \frac{\sin a \cdot \sin\beta}{\sin b}$ was zweideutig ist, $\tan\frac{c}{2} = \frac{\sin a}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}$, γ mit Sinus- oder Cosinus-Satz zu finden.

Beispiel. $a = 39^0\,29'$, $b = 66^0\,45'$, $\beta = 43^0\,20'$ giebt

$$\alpha = 28^0\,21'\,14'' \quad \text{oder} \quad \alpha_1 = 151^0\,38'\,46''$$
$$c = 94^0\,54'\,36'' \quad \text{oder} \quad c_1 = 33^0\,2'\,42''$$
$$\gamma = 48^0\,5'\,9'' \quad \text{oder} \quad \gamma_1 = 24^0\,2'\,3''.$$

d) Gegeben a, b und der eingeschlossene Winkel γ.

Auflösung. $\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\sin\gamma$. Das Übrige mit Sinus- oder Cosinus-Satz.

Beispiel. $a = 73^0\,25'$, $b = 52^0\,42'$, $\gamma = 63^0\,15'$ giebt

$$c = 58^0\,59'\,22'', \quad \alpha = 93^0\,4'\,48'', \quad \beta = 55^0\,12'\,2''.$$

e) Gegeben b, der anliegende Winkel γ und der gegenüberliegende Winkel β.

Auflösung. $\sin c = \frac{\sin b\sin\gamma}{\sin\beta}$, $\tan\frac{a}{2} = \frac{\sin b}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin(\beta+\gamma)}{2\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2}}$.

Beispiel. $b = 80^0\,24'$, $\beta = 70^0\,29'$, $\gamma = 66^0\,45'$.

Auflösung. $c = 73^0\,58'\,35''$, $a = 63^0\,53'\,20''$, $\alpha = 59^0\,8'\,3''$.

f) Gegeben b und die anliegenden Winkel α und γ.

Auflösung. $\cos\beta = \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos b$ u. s. w.

Beispiel. $b = 66^0\,45'$, $\gamma = 43^0\,20'$, $\alpha = 79^0\,9'$ giebt

$$\beta = 82^0\,34'\,44'', \quad c = 39^0\,28'\,56'', \quad a = 65^0\,30'\,14''.$$

V. Konstruktion, Kongruenz und Möglichkeit sphärischer Dreiecke bei drei gegebenen Stücken.*)

16) Der geometrische Ort aller Punkte der Kugeloberfläche, die von einem gegebenen Punkte derselben gleiche sphärische Entfernung haben, ist ein Kreis. Die Projektion des gegebenen Punktes auf die Ebene dieses Kreises fällt in dessen Mittelpunkt.

Da zu gleichen Bogen größter Kreise auf der Kugel auch gleiche Sehnen gehören, so kann man mit dem Zirkel auf der Kugeloberfläche genau ebenso Kreiskonstruktionen ausführen, wie auf der Ebene.

Wendet man die senkrechte Projektion an, so erscheinen sämtliche ebenen Schnitte, die senkrecht auf der Ebene der Zeichnung stehen, als gerade Linien. Davon soll bisweilen Gebrauch gemacht werden, um die Zeichnungen zu vereinfachen. Ebene Schnitte durch das Centrum geben größte Kreise. Diese vertreten bei den Konstruktionen gewissermaßen die Stelle der geraden Linie.

Ist die Konstruktion eines sphärischen Dreiecks eindeutig, so ist zugleich ein Kongruenzsatz für solche Dreiecke gefunden, damit aber zugleich ein Kongruenzsatz für Dreikant-Ecken, deren Theorie erst hier endgültig zum Austrage kommt.

Zu den Fällen der Eindeutigkeit sollen auch diejenigen gerechnet werden, bei denen noch ein zweites, zum vorigen symmetrisches Dreieck möglich ist. Es findet nämlich dann (sowohl im konstruktiven, als auch im rechnerischen Sinne) Übereinstimmung in allen homologen Stücken statt, obwohl die Dreiecke nicht zur Deckung gebracht werden können. Man erkennt dies am besten, indem man ein auf eine Kugel gezeichnetes Dreieck mit einem Punkte seiner Fläche an einen Spiegel hält. Das Spiegelbild hat dann mit dem Dreieck die der Deckung entsprechende Lage, beide treffen sich aber nur in einem Punkte. Im Übrigen sind sie „von einander weggekrümmt". Auch kann jede Zeichnung in zweifachem Sinne aufgefaßt werden, da man sie als konkav oder konvex betrachten darf.

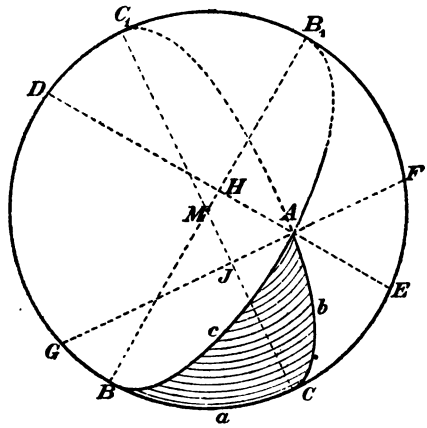
17) **Aufgabe.** Auf der Kugelfläche mit Radius 1 soll ein Dreieck mit den Seiten a, b, c konstruiert werden.

Auflösung. In Figur 114 stelle der um M geschlagene Kreis die Kugel dar. $\overset{\frown}{BC} = a$, $\overset{\frown}{BD} = c$ und $\overset{\frown}{CF} = c$ seien die gegebenen Bogen. Man ziehe die Durchmesser BB_1 und CC_1 und fälle auf sie von D bezw.

*) Dieses Kapitel kann im Unterrichte überschlagen oder auch an den Schluß gestellt werden.

F aus die Lote DE und FG. Diese stellen die Kreisschnitte dar, deren sämtliche Umrißpunkte von B bezw. C die sphärische Entfernung c bezw. b haben. Ist A der Schnittpunkt beider Lote, so ist der dritte Eckpunkt A des Dreiecks ABC gefunden.

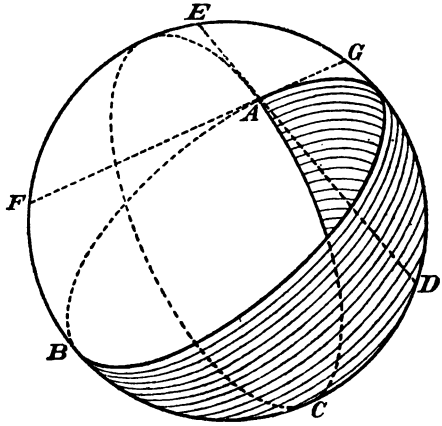
Fig. 114.



Seine Seiten $AB = c$ und $CA = b$ erscheinen als Ellipsenbogen. Der eine wird mit Hülfe des konstanten Verhältnisses $HA : HE$, der andere mit Hülfe des Verhältnisses $JA : JF$ konstruiert. Auf der Rückseite der Kugel befindet sich das zugehörige symmetrische Dreieck. Beide Zeichnungen decken sich. Damit ist die Aufgabe erledigt.

Bemerkung. Figur 115 stellt den Fall dar, wo $b > \pi$ und $c < \pi$ ist, so daß die Konstruktion auf die Rückseite der Kugel übergreift. Dabei wird der Winkel $BCA = \gamma$ ein überstumpfer.

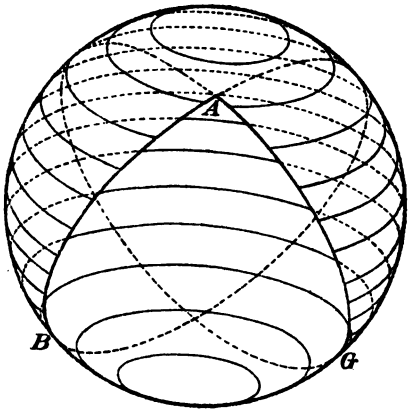
Fig. 115.



Figur 116 auf folgender Seite stellt den Fall dar, wo sowohl b als auch c größer als π ist. Dabei sind β und γ überstumpfe Winkel. Die Konstruktion, auf die Rückseite der Kugel verlegt, umfaßt die ganze Rückseite und greift auf die Vorderseite über, was durch Schraffierung der konkaven und konvexen Flächen angedeutet wird. Solche Fälle mit überstumpfen Bogen und Winkeln sollen jedoch ausgeschlossen werden. Das Übergreifen über die Halbkugelfläche soll also nicht gestattet sein.

Die erste Bedingung für die Möglichkeit des Dreiecks ist dann $a + b + c \leq 2\pi$. Im Grenzfalle nimmt das Dreieck die Halb-

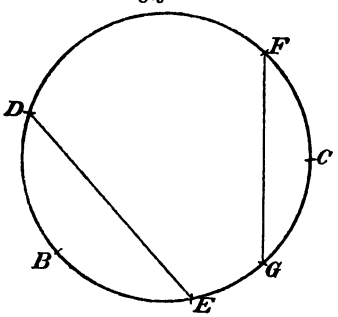
Fig. 116.



kugelfläche vollständig ein und hat die Winkel $\alpha = 180^0$, $\beta = 180^0$, $\gamma = 180^0$, also die Winkelsumme 540^0. Die drei Seiten bilden einen größten Kreis.

Eine zweite Bedingung ist aber $b + c > a$, wo a die größte Seite ist. Denn $\overset{\frown}{BC}$ ist die kürzeste sphärische Entfernung zwischen B und C, so daß im Falle $b + c < a$ die Hülfskreise FG und DE keinen Schnitt A geben können. Vergleiche Figur 117. Also:

Fig. 117.



Sieht man von den Grenzfällen ab, so sind bei konvexen Ecken die Bedingungen für die Möglichkeit eines Dreiecks aus a, b, c durch

$$a + b + c < 2\pi \quad \text{und} \quad b + c > a$$

gegeben, wo a die größte Seite ist. Die Konstruktion ist eindeutig. Daraus folgt einer der in Teil II angegebenen Sätze über die Kongruenz oder die Symmetrie von Dreikant-Ecken.

18) **Aufgabe.** Ein Dreieck aus den Winkeln α, β und γ auf der Kugel mit Radius 1 zu konstruieren.

Auflösung. Man bilde die Bogen a_1, b_1 und c_1, die zu den Winkeln $180^0 - \alpha$, $180^0 - \beta$ und $180^0 - \gamma$ gehören. Aus diesen Bogen konstruiere man nach der vorigen Methode ein Dreieck. Im Kugelcentrum errichte man auf den Seitenflächen der zugehörigen Ecke nach außen gehende Lote. Diese geben die Eckpunkte des gesuchten Kugeldreiecks. Mit Hülfe der durch je zwei Eckpunkte gelegten Hauptschnitte wird die Konstruktion vollendet.

Nach voriger Untersuchung ist sie für konvexe Dreiecke nur möglich unter den Bedingungen $(180^0 - \alpha) + (180^0 - \beta) + (180^0 - \gamma) < 2 \cdot 180^0$ oder $\alpha + \beta + \gamma > 180^0$ und $(180^0 - \beta)$

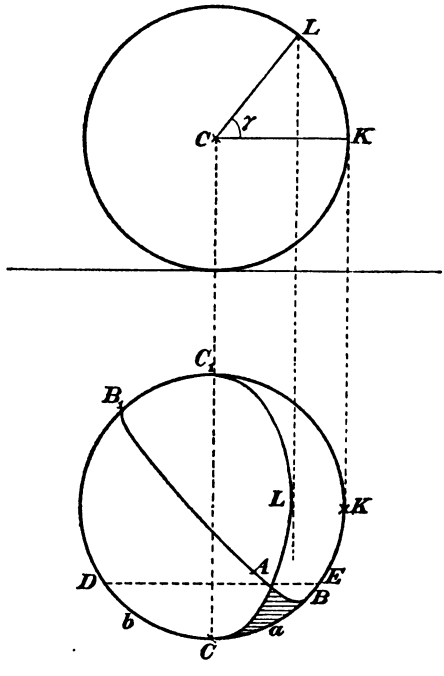
$+ (180^0 - \gamma) > 180^0 - \alpha$, wo $(\pi - \alpha)$ der größte der drei Bogen, also α der kleinste Winkel ist, also $\alpha + \beta + \gamma < 540^0$.

Dieselben Bedingungen folgen aus der Flächenformel $F = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 180^0}{180^0}\pi$. Da nämlich F nicht negativ werden darf, muß $\alpha + \beta + \gamma > 180^0$ sein. Da ferner die Fläche nicht über die Halbkugelfläche übergreifen soll, muß $\frac{\alpha + \beta + \gamma - 180^0}{180^0}\pi < 2 \cdot 1^2\pi$ sein, d. h. $\alpha + \beta + \gamma < 540^0$.

Aus der Eindeutigkeit der Konstruktion folgt wieder einer der in Teil II angegebenen Sätze über die Kongruenz und die Symmetrie von Dreikant-Ecken.

19) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus den Seiten a, b und dem eingeschlossenen Winkel γ.

Fig. 118.



Auflösung. In der Aufrißfigur werde CK horizontal gezogen und $\sphericalangle KCL = \gamma$ gemacht. Die zugehörige Grundrißfigur giebt das zum Winkel γ gehörige Kugelzweieck mit den Bogen CKC_1 und CLC_1. Macht man nun $\overset{\frown}{CD} = b$, so giebt das Lot DE zu CC_1 den Kreis, dessen Punkte sämtlich von C die sphärische Entfernung b haben. Der Schnittpunkt A giebt auf dem Bogen CLC_1 die sphärische Seite $\overset{\frown}{AC} = b$. Macht man nun $\overset{\frown}{CB} = a$, so ist leicht die Grenzellipse BAB_1 zu konstruieren, die einen größten Kreis darstellt.

Die Aufgabe ist für konvexe Ecken stets möglich, sobald $\beta < 180^0$, $a < \pi$, $b < \pi$ ist.

Die Konstruktion ist im obigen Sinne eindeutig, giebt also wieder einen der genannten Kongruenzsätze.

20) **Aufgabe.** Ein Dreieck aus a, β und γ zu konstruieren.

Auflösung. Man bilde die Bogen b_1 und c_1 zu $180^0 - \beta$ und $180^0 - \gamma$ und den Winkel α_1 zum Bogen $\pi - a_1$, dann läßt sich ein Dreieck aus b_1, c_1 und α_1 nach voriger Methode konstruieren. Das zugehörige Polardreieck ist das gesuchte.

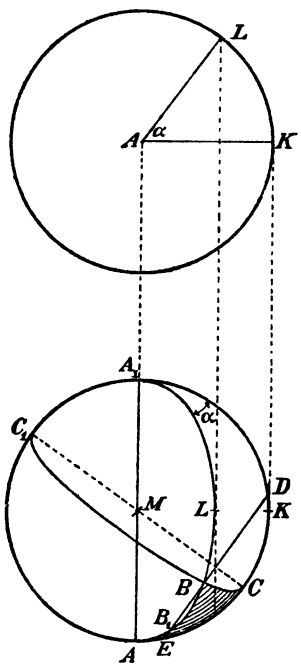
Die Bedingungen sind nach der vorigen Untersuchung $a < \pi$, $\beta < 180^0$, $\gamma < 180^0$.

Die Konstruktion ist eindeutig und giebt ebenfalls einen Satz über Kongruenz und Symmetrie für Dreikant-Ecken.

21) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus a, b und dem (nicht eingeschlossenen) Winkel α.

In Figur 119 ist wieder in der Aufrißfigur $\sphericalangle KAL = \alpha$ gemacht. Daraus ist die Grundrißfigur mit dem von AKA_1 und ALA_1 begrenzten Kugelzweieck hergestellt, welches den richtigen Winkel α hat. Man mache ferner $\overset{\frown}{AC} = b$, ziehe den Durchmesser CC_1 und mache $\overset{\frown}{CD} = a$. Das Lot DE zu CC_1 giebt mit dem Bogen ALA_1 zwei Schnittpunkte B und B_1 (oder keinen, oder einen). Zu jedem kann der als Ellipse erscheinende Bogen CBC_1 bezw. CB_1C_1 leicht konstruiert werden. Die Dreiecke ABC und AB_1C sind die gesuchten beiden Dreiecke.

Fig. 119.



Zur Untersuchung der Möglichkeitsbedingungen unterscheide man drei Fälle:

$$\alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \alpha > \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

a) Im Falle $\alpha < \frac{\pi}{2}$ giebt es keine Lösung, wenn das Lot DE den Bogen ALA_1 nicht trifft.

Im Grenzfalle ist DE Tangente. Ist B_2 ihr Berührungspunkt, so ist $\triangle CB_2A$ bei B_2 rechtwinklig. Nach dem Sinussatze ist dann

$$\sin a = \sin b \sin \alpha.$$

Bei $\sin a < \sin b \sin \alpha$ giebt es also keine Lösung.

[Die Bedingung läßt sich auch schreiben

$$1 < \frac{\sin b \sin \alpha}{\sin a},$$

oder nach dem Sinussatze $1 < \sin \beta$; darin liegt die Unmöglichkeit.]

Trifft DE nach A, d. h. ist $a = b$, so ist das eine Dreieck gleichschenklig, das andere hat die Fläche Null.

Ist aber

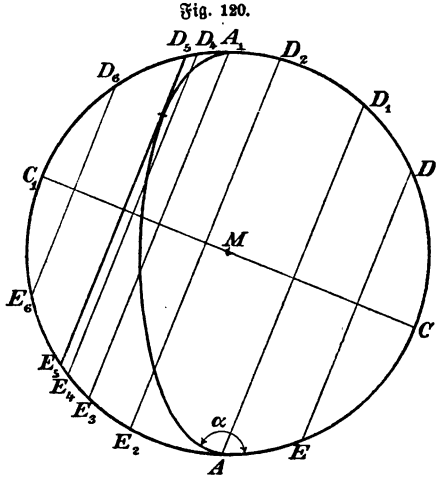
$$\sin b > \sin a > \sin b \sin \alpha,$$

so sind zwei Dreiecke möglich.

Ist $a > b$ und $< [CA_1 = \pi - b]$, so ist eine Lösung möglich. Ist $a = \pi - b$, so ist das Kugelzweieck zwischen AKA_1 und ALA_1 identisch mit dem Dreiecke.

Bei $a > \pi - b$ würde das Dreieck auf die Rückseite der Kugelfläche übergreifen und Seite $c > \pi$ werden, was ausgeschlossen bleiben sollte.

Fig. 120.



b) Im Falle $\alpha > \frac{\pi}{2}$ findet, wie leicht zu zeigen, Folgendes statt: DE giebt keine Lösung, Grenzfall $D_1 A$ giebt eine Lösung mit Fläche Null. Hier handelt es sich um $a < b$ bezw. $a = b$.

$D_2 E_2$ giebt eine Lösung, $A_1 E_3$ zwei Lösungen, jedoch die eine mit Fläche Null. Hier handelt es sich um $a < \pi - b$ bezw. $a = \pi - b$.

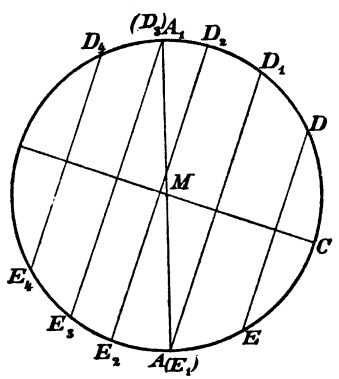
$D_4 E_4$ giebt zwei Lösungen, Tangente $D_5 E_5$ nur eine, der letzte Fall giebt ein rechtwinkliges Dreieck. Es handelt sich also wieder um die Bedingungsgleichung

$$\sin a = \sin b \sin \alpha,$$

vorher um

$$\sin b > \sin a > \sin b \sin \alpha.$$

Fig. 121.



Keine Lösung hat man bei $\sin\alpha < \sin b \sin\alpha$.

c) Im Falle $\alpha = \frac{\pi}{2}$ giebt es, wie die Figur zeigt, keine Lösung bei $a < b$ und $a > \pi - b$, dagegen eine Lösung bei

$$b < a < \pi - b.$$

Im Grenzfalle ist jedesmal die Fläche des Dreiecks gleich Null.

Man kann sich sämtliche Resultate in Tabellenform zusammenstellen und den entsprechenden Kongruenz- bezw. Symmetriesatz für Dreikant-Ecken unter Hinweis auf die Tabelle aussprechen. Des komplizierten Charakters halber wurde der Satz in Teil II übergangen.

22) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus α, β und a.

Auflösung. Man konstruiere wie in den früheren Fällen zunächst das Polardreieck und dann das gesuchte.

Die Bedingungen für keine, eine oder zwei Lösungen erhält man, wenn man in der vorigen Untersuchung die griechischen mit den lateinischen Buchstaben vertauscht. Die Hauptgrenzbedingung wird wieder

$$\sin\alpha \geqq \sin\beta \sin a.$$

VI. Folgerungen des Cosinussatzes.

28) Man führe in die Gleichung 9)

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$$

statt $\cos\alpha$ ein $2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$, dann entsteht rechts

$$\cos b \cos c - \sin b \sin c + 2 \sin b \sin c \cos^2\frac{\alpha}{2}$$
$$= \cos(b + c) + 2 \sin b \sin c \cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Demnach ist

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos a - \cos(b + c)}{2 \sin b \sin c}}.$$

Da aber $\cos a - \cos(b + c) = -2 \sin\frac{a + b + c}{2} \sin\frac{a - b - c}{2}$
$= 2 \sin\frac{a + b + c}{2} \sin\frac{b + c - a}{2}$ ist, so folgt

$$12)\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{a+b+c}{2} \sin\frac{-a+b+c}{2}}{\sin b \sin c}} = \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s - a)}{\sin b \sin c}},$$

wo $s = \frac{a + b + c}{2}$ ist.

24) Führt man ebenso in 9) statt $\cos\frac{\alpha}{2}$ ein $1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, so folgt in derselben Weise

$$13)\quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{a-b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin b\sin c}} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}.$$

Durch Division folgt aus 13) und 14) noch

$$14)\quad \tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}.$$

Durch Multiplikation dagegen erhält man unter beiderseitiger Verdoppelung

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sin b\sin c}\sqrt{\sin s\cdot\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)},$$

folglich

$$15)\quad \sin\alpha = \frac{2}{\sin b\sin c}\sqrt{\sin s\cdot\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}.$$

Mit Hülfe von 14) findet man am bequemsten die Winkel des Dreiecks aus den Seiten.

Sämtliche Wurzeln sind positiv zu nehmen, da überstumpfe Winkel ausgeschlossen werden sollten.

25) Macht man dieselben Betrachtungen für den anderen Cosinus-Satz

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a,$$

und setzt man $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \sigma$, so findet man die Formeln

$$16)\quad \cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}},$$

$$17)\quad \sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}},$$

$$18)\quad \tan\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}},$$

$$19)\quad \sin a = \frac{2}{\sin\beta\sin\gamma}\sqrt{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}.$$

26) Aus den Gleichungen für $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\beta}{2}$, $\cos\frac{\gamma}{2}$, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\beta}{2}$, $\sin\frac{\gamma}{2}$ erhält man durch entsprechende Multiplikationen neue. So ist z. B.

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}\sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-b)}{\sin a \sin c}}$$
$$= \frac{\sin s}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a \sin b}}.$$

Die letzte Wurzel ist aber gleich $\sin\frac{\gamma}{2}$, also bestehen folgende von der Irrationalität befreiten Gleichungen:

20)
$$\begin{cases} \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} = \frac{\sin s}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}, & \text{und ebenso} \\ \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\sin(s-c)}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}, \\ \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} = \frac{\sin(s-b)}{\sin c}\cos\frac{\gamma}{2}, \\ \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\sin(s-a)}{\sin c}\cos\frac{\gamma}{2}. \end{cases}$$

Je zwei derselben lassen sich nun so vereinigen, daß links die Funktion einer Winkelsumme oder Differenz entsteht. Man erhält z. B.

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\sin s - \sin(s-c)}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{2\cos\frac{s+s-c}{2}\sin\frac{s-s+c}{2}}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}$$
$$= \frac{2\cos\frac{(2s-c)}{2}\sin\frac{c}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{\gamma}{2},$$

oder endlich, da $2s - c = a + b$ ist:

21)
$$\begin{cases} \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{\gamma}{2}, & \text{und ebenso} \\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\sin\frac{\gamma}{2}, \\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cos\frac{\gamma}{2}, \\ \sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\cos\frac{\gamma}{2}. \end{cases}$$

27) Diese von Mollweide aufgestellten, aber wegen der Gleichzeitigkeit der Veröffentlichung auch nach Gauß und Delambre genannten Formeln werden übersichtlicher, wenn man auf die eine Seite nur die Seiten, auf die andere nur die Winkel bringt, also:

$$21^*) \quad \begin{cases} \dfrac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \dfrac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}, & \dfrac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} = \dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}, \\ \dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \dfrac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}, & \dfrac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} = \dfrac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}. \end{cases}$$

Man braucht nur die erste zu merken. Jede folgende nämlich entsteht dadurch, daß man in der letzten auf der einen Seite + in − verwandelt, auf der andern aber Cosinus und Sinus mit einander vertauscht.

Versucht man in die erste der Formeln die Polarsupplemente in ähnlicher Weise einzusetzen, wie vorher, also

$$\frac{\cos\frac{\pi-\alpha_1+\pi-\beta_1}{2}}{\cos\frac{\pi-\gamma_1}{2}} = \frac{\cos\frac{\pi-a_1+\pi-b_1}{2}}{\sin\frac{\pi-c_1}{2}},$$

so ergiebt sich die Umformung, daß man auf die Anfangsformel zurückkommt. Daraus läßt sich schließen, daß in allen zur Ableitung benutzten und in den aus 20) abzuleitenden Formeln Seiten und Winkel vertauscht werden können, wobei nur auf die Vorzeichen geachtet werden muß.

28) Durch Division erhält man aus je zwei dieser Formeln die sogenannten Neperschen Analogien, nämlich:

$$22) \quad \begin{cases} \dfrac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cot\frac{\gamma}{2}} = \dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}, & \dfrac{\tan\frac{a+b}{2}}{\tan\frac{c}{2}} = \dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}, \\ \dfrac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cot\frac{\gamma}{2}} = \dfrac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}, & \dfrac{\tan\frac{a-b}{2}}{\tan\frac{c}{2}} = \dfrac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}. \end{cases}$$

Diese haben erstens den Vorzug nur 5 statt 6 Stücke zu enthalten; ferner erhält man durch Division aus je zwei zusammenstehenden das Analogon des Tangentensatzes, nämlich:

23)
$$\frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\tan\frac{a+b}{2}}{\tan\frac{a-b}{2}},$$

so daß für unendlich kleine Bogen die Übereinstimmung mit der Formel der ebenen Trigonometrie wieder hergestellt ist.

29) Aus den beiden ersten Gaußschen Formeln 21*) folgt durch Addition

$$\frac{\cos\frac{a+b}{2}+\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

oder

$$\frac{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Schafft man den Faktor 2 nach rechts, so folgt

24)
$$\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}{\sin\gamma}.$$

Ebenso folgt durch Subtraktion

25)
$$\frac{-\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}}{\sin\gamma}.$$

Nun ist der sphärische Exceß des Dreiecks

$$E = \alpha+\beta+\gamma-180^0,$$

also

$$\frac{E}{2} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} - 90^0,$$

folglich nach 25)

$$\sin\frac{E}{2} = -\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin\gamma.$$

Bei Radius 1 ist die Dreiecksfläche $F = (\hat{\alpha}+\hat{\beta}+\hat{\gamma}-\pi) = E$, also ist dann

26) $$\sin\frac{F}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\gamma}{\cos\frac{c}{2}}.$$

Dies ist bei Radius r noch mit r^2 zu multiplizieren.

Ebenso giebt Gleichung 24)

$$\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} = \cos\left[\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\gamma\right] = \cos\left[\frac{F}{2}-\gamma-90^0\right]$$
$$= \frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin\gamma,$$

oder

26*) $$-\sin\left[\frac{F}{2}-\gamma\right] = \frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin\gamma}{\cos\frac{c}{2}},$$

Radius 1 vorausgesetzt, also

$$-\sin\frac{F}{2}\cos\gamma + \cos\frac{F}{2}\sin\gamma = \frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin\gamma}{\cos\frac{c}{2}}.$$

Durch Division und Umformung folgt aus 26) und der letzten Gleichung eine neue, die sich umwandeln läßt in

27) $$\cot\frac{F}{2} = \frac{\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}+\cos\gamma}{\sin\gamma}.$$

30) Von L'Huilier rührt folgende Entwickelung für die Flächenberechnung her:

Aus der Gaußschen Gleichung

$$\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$
$$= \frac{\cos\left(\frac{F}{2}-\frac{\gamma}{2}-90^0\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}} = -\frac{\sin\left(\frac{F}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

folgt, wenn beiderseits 1 abgezogen wird,

$$\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} - 1 = -\frac{\sin\left(\frac{F}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}} - 1$$

oder

$$\frac{\cos\frac{a+b}{2}-\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{c}{2}}=-\frac{\sin\left(\frac{F}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)+\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

oder

$$-\frac{2\sin\frac{a+b+c}{4}\sin\frac{a+b-c}{4}}{\cos\frac{c}{2}}=-\frac{2\sin\frac{F}{4}\cos\left(\frac{F}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

oder

28) $$\frac{\sin\frac{s}{2}\sin\frac{s-c}{2}}{\cos\frac{c}{2}}=\frac{\sin\frac{F}{4}\cos\left(\frac{F}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Ebenso folgt aus der zweiten Gaußschen Gleichung

$$\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}=\frac{\cos\left(\frac{F}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

auf demselben Wege

28*) $$\frac{\sin\frac{s-a}{2}\sin\frac{s-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}=-\frac{\sin\frac{F}{4}\sin\left(\frac{F}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Durch Multiplikation und Umformung folgt aus den beiden Gleichungen 28) unter Berücksichtigung von 26*)

29) $$\sin\frac{F}{4}=\sqrt{\frac{\sin\frac{s}{2}\sin\frac{s-a}{2}\sin\frac{s-b}{2}\sin\frac{s-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}}.$$

Hätte man oben beiderseits 1 addiert, statt es zu subtrahieren, so hätte sich ergeben

29*) $$\cos\frac{F}{4}=\sqrt{\frac{\cos\frac{s}{2}\cos\frac{s-a}{2}\cos\frac{s-b}{2}\cos\frac{s-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}}.$$

Durch Division erhält man schließlich

30) $$\tan\frac{F}{4}=\sqrt{\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-a}{2}\tan\frac{s-b}{2}\tan\frac{s-c}{2}}.$$

Für sehr kleine Bogen und entsprechend kleines F gehen 29) und 30) in die Heronische Dreiecksformel über.

VII. Vereinfachte Berechnungsmethoden.

31) a. Gegeben die drei Seiten.

Auflösung. $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-a)}{\sin b \cdot \sin c}}$,

dazu die Formeln für $\frac{\beta}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$ mit Hülfe cyklischer Vertauschung.

b. Gegeben die drei Winkel.

Auflösung. $\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta \cdot \sin\gamma}}$

und die durch cyklische Vertauschung entstehenden Formeln.

c. Gegeben a, b, γ.

Auflösung. $$\tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{\gamma}{2},$$

$$\tan\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{\gamma}{2},$$

daraus α und β zu berechnen, sodann Sinussatz anzuwenden.

d. Gegeben α, β und c.

Auflösung. $$\tan\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\tan\frac{c}{2},$$

$$\tan\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\tan\frac{c}{2}.$$

e. Gegeben a, b, α.

Auflösung. $$\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin a}\sin\alpha,$$

$$\tan\frac{c}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\tan\frac{a+b}{2},$$

$$\cot\frac{\gamma}{2} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}}\tan\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

f. Gegeben a, α, β.

Auflösung. $\sin b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\sin a$,

$$\cot\frac{\gamma}{2} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}}\tan\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\tan\frac{c}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\tan\frac{a+b}{2}.$$

VIII. Bemerkungen und Andeutungen über die sphärische Reciprocität.

[32) Betrachtet man einen größten Kugelkreis als Äquator, so gehört zu ihm nach jeder Seite ein Pol, und umgekehrt gehört zu jedem Pole ein Äquator, d. h. ein größter Kreis. Jeder Punktfigur entspricht also eine von größten Kreisen gebildete Polarfigur. Jede Kurve auf der Kugelfläche kann als eine Folge von Punkten angesehen werden; ihr entspricht eine Folge von größten Kreisen, die eine andere Kurve umhüllen oder ausschattieren. Letztere heißt die Polarkurve der ersteren.

Ähnlich, wie bei der Lehre von Pol und Polare kann man zu jedem Satze der Kugelgeometrie den entsprechenden Polarsatz finden.

Einem durch zwei Punkte begrenzten Bogen eines größten Kreises entspricht stets ein Punkt, in dem sich zwei größte Kreise schneiden. Hat der Bogen die Länge a, so schneiden sich die Kreise so, daß $\pi - \alpha_1 = a$ oder $\alpha_1 = \pi - a$ ist. Jedem begrenzten Bogen a eines größten Kreises entspricht also ein Winkel $\alpha_1 = \pi - a$.

Dem Umfange $u = a + b + c$ des Dreiecks entspricht eine Winkelsumme $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = (\pi - a) + (\pi - b) + (\pi - c) = 3\pi - (a + b + c) = 3\pi - u$. Zugleich ist $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = E_1 + \pi$, wo E_1 den sphärischen Exceß bedeutet. Daraus folgt $3\pi - u = E_1 + \pi$, oder $E_1 = 2\pi - u$. Bleibt der Dreiecksumfang um e unter 2π, so ist $u = 2\pi - e$, folglich $E_1 = e$. Man kann also sagen: Der sphärische „Mangel" eines Dreiecks ist gleich dem sphärischen Überschuß (Exceß) des Polardreiecks. Gewöhnlich wird der Satz so ausgedrückt, daß E_1 und u sich zu 360^0 ergänzen.

Den Punkten eines Kreises, der mit der sphärischen Länge a (als Radius) um einen Kugelpunkt geschlagen ist, entspricht eine Folge größter Kreise, die den Äquator des Punktes d. h. den „Polarkreis" (nicht im geographischen Sinne zu verstehen!) unter konstantem Winkel schneiden. Diese Kreise schattieren einen Parallelkreis des Äquators aus. Folglich: Die Polarkurve eines Kreises ist stets ein Kreis. Ist der Radius des ersteren gleich a, so ist der andere um $\bar{a} = \pi - a$ vom Äquator entfernt. Concentrischen Kreisen entsprechen also concentrische Kreise.

Dem umbeschriebenen Kreise eines Dreiecks entspricht der einbeschriebene des Polardreiecks. Nun geben aber drei größte Kreise im ganzen acht Kugeldreiecke, so daß acht Berührungskreise vorhanden sind. Ist nun zum Dreiecke aus a, b und c das Polardreieck A, B, C und dessen Gegendreieck (Antipodenpunkte!) $A_1 B_1 C_1$, so entsprechen den acht Berührungskreisen, von denen je zwei Antipodenkreise sind, acht umbeschriebene Kreise ABC, $A_1 BC$, $AB_1 C$, ABC_1, $AB_1 C_1$, $A_1 BC_1$, $A_1 B_1 C$, $A_1 B_1 C_1$, von denen ebenfalls je zwei Antipodenkreise sind. Den Eigenschaften des einen Dreiecks und seiner Kreise entsprechen die polaren oder reciproken Eigenschaften des Polardreiecks und seiner Kreise.

Durch stereographische Projektion zweier solcher Gebilde erhält man zwei Kreisgebilde in der Ebene, die ebenfalls in Polarbeziehungen zu einander stehen. Darin liegt eine wahre Fundgrube für neu auszusprechende Sätze der Elementargeometrie.

Um von dem weittragenden Charakter dieser Dinge eine Anschauung zu geben, sei nur die Kurve konstanter sphärischer Fadensumme erwähnt, d. h. die sphärische Ellipse. Ist die sphärische Entfernung der Brennpunkte gleich $2e$ und die konstante Fadensumme gleich $2k$, so ist die Kurve durch die Gleichung $v_1 + v_2 = 2k$ vollkommen bestimmt. Jedes der Dreiecke über $2e$ mit konstanter Fadensumme hat konstanten Umfang. Bei der Polarkurve handelt es sich um einen festen Winkel ε, der sich aus $\pi - \varepsilon = 2e$, oder $\varepsilon = \pi - 2e$ bestimmt. Den Ellipsenpunkten entsprechen in der Polarfigur größte Kreise, welche die Schenkel des festen Winkels unter Winkeln φ_1 und φ_2 schneiden, aber so, daß $(\pi - \varphi_1) + (\pi - \varphi_2) = 2k$ sein muß, oder $\varphi_1 + \varphi_2 = 2(\pi - k)$. Jedes der abgeschnittenen Dreiecke hat also die konstante Winkelsumme $\varphi_1 + \varphi_2 + \varepsilon = 2(\pi - k) + \varepsilon$, folglich konstanten Inhalt. Dies entspricht ganz der Eigenschaft der Hyperbel, daß alle Tangentendreiecke konstanten Inhalt haben. (Vgl. Teil II, Fig. 197.) Man kann also die Polarkurve als sphärische Hyperbel betrachten, die Schenkel des kon-

ſtanten Winkels als Aſymptoten, und für die „Tangendreiecke" iſt der obige Satz gefunden worden.

Nimmt man aber ſtatt des einen Brennpunktes ſeinen Gegenpunkt, ſo geht die Gleichung der Ellipſe in $v_1 + (\pi - v_2) = 2k$ oder in $v_1 - v_2 = 2k - \pi$ über, was der gewöhnlichen Hyperbelgleichung entſpricht und der Polarkurve eine konſtante Winkeldifferenz aufnötigt, wobei es ſich übrigens nur um die Vertauſchung eines Winkels und ſeines Nebenwinkels handelt. Dabei liegt die Frage nahe, ob die ſo definierte Hyperbel mit der vorher als Polarkurve erklärten identiſch iſt, was in der That der Fall iſt. Von beſonderer Wichtigkeit iſt, daß zwiſchen den beiden Brennpunkten und den beiden Aſymptoten Reciprocität ſtattfindet und daß im allgemeinen zu jeder Brennpunkteigenſchaft eine Aſymptoteneigenſchaft gehört.

Es ſei nur bemerkt, daß die Lehre von den ſphäriſchen Kegelſchnitten für die mathematiſche Phyſik von größter Bedeutung geworden iſt, daß ferner die ſtereographiſchen Projektionen dieſer Kurven zu höheren Teilen der Funktionentheorie, der Lehre von den elliptiſchen Funktionen, in eigentümlicher Beziehung ſtehen. (Vergl. des Verfaſſers Einführung in die Theorie der iſogonalen Verwandtſchaften, Kap. XV.)

Aus dieſen Andeutungen wird man erkennen, daß die anfangs ſo wenig anregend erſcheinende Lehre von den Ecken und ihren Polarecken zu den intereſſanteſten Gebieten der neueren Mathematik hinüberführt.]

IX. Zuſammenſtellung der weſentlichen Formeln.

a) Rechtwinklige Dreiecke.

1) $\cos c = \cos a \cos b$

2) $\sin \alpha = \dfrac{\sin a}{\sin c}$

3) $\cos \alpha = \dfrac{\tan b}{\tan c}$

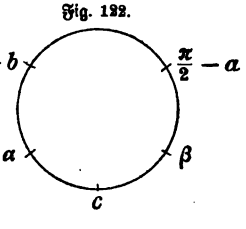
4) $\tan \alpha = \dfrac{\tan a}{\sin b}$

5) $\cos a = \dfrac{\cos \alpha}{\sin \beta}$

6) $\cos c = \cot \alpha \cot \beta.$

Neperſche Regel:

Fig. 132.



7)
$$\begin{cases} \cos c = \cot\alpha\cot\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right), \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot\beta\cot\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin\alpha\sin c, \\ \cos\alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2} - b\right)\cot c = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin\beta. \end{cases}$$

b) Schiefwinklige Dreiecke.

8) $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \sin a : \sin b : \sin c.$

9*) $\cos\alpha = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$ 10*) $\cos a = \dfrac{\cos\alpha + \cos\beta \cos\gamma}{\sin\beta \sin\gamma}$

11) $\tan\dfrac{c}{2} = \dfrac{\sin a}{\sin\alpha} \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}}$

11*) $\cot\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin a} \dfrac{\sin(a+b)}{2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$

12) $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin s \cdot \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}$ 13) $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}}$

14) $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}}$

15) $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{\sin b \sin a}$

16) $\cos\dfrac{a}{2} = \sqrt{\dfrac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}}$ 17) $\sin\dfrac{a}{2} = \sqrt{\dfrac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}}$

18) $\tan\dfrac{a}{2} = \sqrt{\dfrac{-\cos\sigma\cdot\cos(\sigma-\alpha)}{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}}$

19) $\sin a = \dfrac{2\sqrt{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}}{\sin\beta\sin\gamma}.$

Gaußsche Formeln:

21*)
$$\begin{cases} \dfrac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \dfrac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \\ \dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \dfrac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \\ \dfrac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} = \dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \\ \dfrac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} = \dfrac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \end{cases}$$

Nepersche Analogien:

22)
$$\begin{cases} \dfrac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cot\frac{\gamma}{2}} = \dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} \\ \dfrac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cot\frac{\gamma}{2}} = \dfrac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}} \\ \dfrac{\tan\frac{a+b}{2}}{\tan\frac{c}{2}} = \dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} \\ \dfrac{\tan\frac{a-b}{2}}{\tan\frac{c}{2}} = \dfrac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} \end{cases}$$

23) $$\frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\tan\frac{a+b}{2}}{\tan\frac{a-b}{2}}.$$

26) $$\sin\frac{F}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\gamma}{\cos\frac{c}{2}}.$$

27) $$\cot\frac{F}{2} = \frac{\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}+\cos\gamma}{\sin\gamma}.$$

29) $$\sin\frac{F}{4} = \sqrt{\frac{\sin\frac{s}{2}\sin\frac{s-a}{2}\sin\frac{s-b}{2}\sin\frac{s-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}}$$

29*) $$\cos\frac{F}{4} = \sqrt{\frac{\cos\frac{s}{2}\cos\frac{s-a}{2}\cos\frac{s-b}{2}\cos\frac{s-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}}$$

30) $$\tan\frac{F}{4} = \sqrt{\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-a}{2}\tan\frac{s-b}{2}\tan\frac{s-c}{2}}.$$

Vierte Abteilung.

Algebraische Analysis mit Anwendungen auf Geometrie und Mechanik.

I. Die ganzen rationalen Funktionen.

1) Begriff der ganzen rationalen Funktion.

Ist in dem Ausdrucke $(a + bx + cx^2)$ die Größe x eine veränderliche, während a, b und c festgegebene (konstante) Größen sind, so entspricht jedem willkürlichen Werte von x ein einziger bestimmter Wert von $(a + bx + cx^2)$.

Weil der Wert des Ausdrucks vom Werte der Veränderlichen (Variablen) x abhängig ist, nennt man den Ausdruck eine Funktion von x. Man deutet dies durch die Schreibweise $f(x)$ an, also

$$f(x) = a + bx + cx^2.$$

Die Veränderliche x wird auch als das Argument der Funktion bezeichnet.

Weil jedem Werte von x nur ein einziger Wert dieser Funktion entspricht, heißt sie eine eindeutige Funktion von x. (Im Gegensatz dazu würden $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{a + x}$ u. s. w. mehrdeutig sein.)

Weil in dem Ausdrucke keine von x abhängigen Irrationalitäten vorkommen, wie z. B. $\sqrt{x}$, $\sqrt{a + x}$, $\sqrt[3]{b + x}$ u. s. w., so heißt die Funktion eine rationale Funktion von x.

Weil endlich x nicht in einem Nenner vorkommt, wie in $\frac{1}{x}$, $\frac{a + bx}{c + dx}$ u. s. w., so heißt die Funktion eine ganze Funktion von x.

In demselben Sinne heißt der höchstens $(n+1)$ Glieder enthaltende Ausdruck

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

eine ganze rationale Funktion von x und zwar, weil n der höchste Exponent der Grundzahl x ist, eine Funktion vom n^{ten} Grade.

Schreibt man y statt $f(x)$, so kann man

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

im Sinne der analytischen Geometrie als die Gleichung eine Kurve vom n^{ten} Grade deuten. Dabei sind aber die Koeffizienten $a, b, c, \cdots k$ als reell vorauszusetzen, was hier stets angenommen werden soll. Dann bedeutet y die zu jeder Abscisse x gehörige Ordinate.

Es sind aber auch andere Deutungen möglich, denn in Teil II, Ster. VIII wurden solche Gleichungen als Gleichungen für die Querschnittsflächen eines Körpers gedeutet.

Aufgabe. Bestimme die Ordinaten folgender Kurven für die Stellen $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, $\cdots$.

$$y = 2 + 3x - 5x^2,$$
$$y = 5 - 4x + 6x^2 - 2x^3,$$
$$y = -1 + \tfrac{3}{4}x - \tfrac{2}{5}x^2 + x^3 + 2x^4.$$

2) Übereinstimmung mehrerer ganzen rationalen Funktionen miteinander.

In den späteren Abschnitten kommt folgender Satz zur Anwendung:

Satz. Stimmen zwei ganze rationale Funktionen n^{ten} Grades für $(n+1)$ Werte überein, so sind sie überhaupt identisch.

Beweis für den 2^{ten} Grad. Die Funktionen

$$f(x) = a + bx + cx^2,$$
$$\varphi(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

mögen für $x = x_1$ nnd ebenso für $x = x_2$ und $x = x_3$ übereinstimmen.

Um zu zeigen, daß dann $a = \alpha$, $b = \beta$ und $c = \gamma$ sein muß (womit die Identität nachgewiesen sein würde), setze man zunächst x_1 in beide Funktionen ein, so daß

$$a + bx_1 + cx_1^2 = \alpha + \beta x_1 + \gamma x_1^2$$

ist, oder

1)
$$\begin{cases}(a-\alpha)+(b-\beta)x_1+(c-\gamma)x_1^2=0.\\ \text{Ebenso bilde man:}\\ (a-\alpha)+(b-\beta)x_2+(c-\gamma)x_2^2=0,\\ (a-\alpha)+(b-\beta)x_3+(c-\gamma)x_3^2=0.\end{cases}$$

Durch Subtraktion folgen die Gleichungen

$$(b-\beta)(x_1-x_2)+(c-\gamma)(x_1^2-x_2^2)=0,$$
$$(b-\beta)(x_2-x_3)+(c-\gamma)(x_2^2-x_3^2)=0.$$

Da x_1 und x_2 verschiedene Werte sind, so darf man in der ersten dieser Gleichungen durch (x_1-x_2) dividieren, ebenso in der zweiten durch (x_2-x_3). Dadurch erhält man

2)
$$\begin{cases}(b-\beta)+(c-\gamma)(x_1+x_2)=0,\\ (b-\beta)+(c-\gamma)(x_2+x_3)=0.\end{cases}$$

Daraus folgt durch Subtraktion

3)
$$(c-\gamma)(x_1-x_3)=0.$$

Weil aber (x_1-x_3) von Null verschieden ist, so muß $c-\gamma=0$ oder $c=\gamma$ sein. Setzt man in einer der Gleichungen 2) $c=\gamma$, so folgt $b=\beta$. Setzt man beides in eine der Gleichungen 1) ein, so folgt $a=\alpha$.

Damit ist die Identität nachgewiesen. (Dies konnte auch in anderer Weise geschehen, wie sich aus folgender Bemerkung ergiebt.)

Bemerkung. Soll demnach eine Funktion $f(x)=a+bx+cx^2$ für x_1 den Wert y_1, für x_2 den Wert y_2, für x_3 den Wert y_3 haben, so müssen ihre Koeffizienten a, b und c ganz bestimmte sein und sich berechnen lassen.

Man hat nämlich die Gleichungen

1)
$$\begin{cases}a+bx_1+cx_1^2=y_1,\\ a+bx_2+cx_2^2=y_2,\\ a+bx_3+cx_3^2=y_3.\end{cases}$$

In diesen betrachtet man a, b und c als Unbekannte, so daß es sich um drei Gleichungen 1. Grades mit drei Unbekannten handelt. Man entfernt a durch Subtraktion und erhält

$$b(x_1-x_2)+c(x_1^2-x_2^2)=y_1-y_2,$$
$$b(x_2-x_3)+c(x_2^2-x_3^2)=y_2-y_3,$$

oder nach beiderseitiger Division durch (x_1-x_2) bezw. (x_2-x_3)

2)
$$\begin{cases} b + c(x_1 + x_2) = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \\ b + c(x_2 + x_3) = \dfrac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}. \end{cases}$$

Durch Subtraktion findet man

$$c(x_1 - x_3) = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}$$

oder

3)
$$c = \frac{1}{x_1 - x_3}\left[\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}\right].$$

Einsetzung in die erste der Gleichungen 2) giebt

$$b = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3}\left[\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}\right].$$

Einsetzung der gefundenen Werte in die erste Gleichungen 1) giebt

$$a = y_1 - bx_1 - cx_1^2 = ?.$$

Aufgabe. Führe den Beweis des Satzes über die Identität für die Funktionen

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$
$$\varphi(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$$

aus, die für die Argumentwerte x_1, x_2, x_3 und x_4 übereinstimmen sollen.

Bemerkung. Man kommt dabei der Reihe nach auf Gleichungen von der Form

$$(a - \alpha) + (b - \beta)x_1 + (c - \gamma)x_1^2 + (d - \delta)x_1^3 = 0,$$

sodann

$$(b - \beta)(x_1 - x_2) + (c - \gamma)(x_1^2 - x_2^2) + (d - \delta)(x_1^3 - x_2^3) = 0,$$

wo die Division durch $(x_1 - x_2)$ aufgeht, also

$$(b - \beta) + (c - \gamma)(x_1 + x_2) + (d - \delta)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0.$$

Die dritte Gruppe erhält die Form

$$(c - \gamma)(x_1 - x_3) + (d - \delta)[(x_1^2 - x_3^2) + x_2(x_1 - x_3)] = 0,$$

oder, da die Division durch $(x_1 - x_3)$ aufgeht,

$$(c - \gamma) + (d - \delta)[x_1 + x_3 + x_2] = 0.$$

Aus diesem System folgt durch Subtraktion

$$(d - \delta)[x_1 - x_4] = 0,$$

und weil $x - x_4$ von Null verschieden ist, so folgt $d - \delta = 0$. Dies in die vorige Gruppe eingesetzt, giebt $c - \gamma = 0$. Rückwärts gehend erhält man noch $b - \beta = 0$ und $(a - \alpha) = 0$.

Bemerkung. Da bei höheren Graden die auftretenden Ausdrücke von der Form $x_1^n - x_2^n$ stets durch $x_1 - x_2$ teilbar sind, so gilt dieselbe Methode für alle ganzen rationalen Funktionen. Der ausgesprochene Satz ist also als bewiesen zu betrachten.

In der Sprache der analytischen Geometrie läßt sich der Satz für die einzelnen Grade folgendermaßen aussprechen:

a) Stimmen die Geraden $y = a + bx$ und $y = \alpha + \beta x$ in zwei Punkten überein, so fallen sie ganz zusammen; oder: Durch zwei Punkte läßt sich nur eine einzige Gerade legen.

b) Fallen die Kurven $y = a + bx + cx^2$ und $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ in drei Punkten zusammen, so fallen sie ganz zusammen; oder: Durch drei gegebene Punkte ist nur eine einzige solche Kurve möglich.

(Suche zu beweisen, daß es sich um Parabeln handelt, deren Achse parallel zur Y-Achse liegt.)

c) Durch $(n + 1)$ gegebene Punkte läßt sich nur eine einzige Kurve von der Gleichung

$$y = a + bx + cx^2 + \cdots + kx^n$$

legen.

3) Direkte Bestimmung der Koeffizienten aus den Werten der Funktion.

Bemerkung. Die Aufgabe, die Koeffizienten von

1) $$y = a + bx + cx^2$$

aus den Wertepaaren x_1, y_1 bezw. x_2, y_2 und x_3, y_3 zu bestimmen, d. h. die Aufgabe, die Kurvengleichung fertig hinzuschreiben, wird mit einem Schlage gelöst, wenn man folgende Gleichung schreibt:

2) $$y = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 + \frac{(x - x_3)(x - x_1)}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)} y_2 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3.$$

Auch dies ist zunächst eine Gleichung obiger Art vom 2^{ten} Grade in Bezug auf x. Setzt man aber in ihr $x = x_1$, so fällt alles weg bis auf $y = y_1$; setzt man $x = x_2$, so bleibt nur stehen $y = y_2$; setzt man $x = x_3$, so erhält man $y = y_3$. Die Kurve 2) stimmt also mit der gesuchten Kurve von der Form a in drei Punkten überein, ist also mit ihr identisch.

Vereinigt man rechts alle x, ebenso alle x^2 und die Glieder ohne x, so erhält man die Form 1) und für a, b und c dieselben Resultate, wie früher. (Vgl. 2.)

Ebenso ist die Gleichung der Kurve von der Form

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

die durch die vier Punkte x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3 und x_4y_4 gehen soll, mit einem Schlage gefunden durch die Gleichung

$$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}y_1 + \frac{(x-x_3)(x-x_4)(x-x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_1)}y_2$$
$$+ \frac{(x-x_4)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_4)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}y_4.$$

Stelle die entsprechende Gleichung auf für den 4^{ten} Grad und den n^{ten} Grad.

Die allgemeine Gleichung heißt die Interpolationsformel von Lagrange.

Beispiel. Bestimme die Konstanten a, b, c, d der Funktion

$$y = f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

wenn y für $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ und $x = 3$ die Werte $y_1 = 10$, 12, 4, 1 haben soll.

Die Aufgabe soll auf beide Arten gelöst werden, erstens durch Auflösung des Systems der vier Gleichungen 1. Grades, zweitens mit Hülfe der Formel von Lagrange.

4) Parabeln höherer Ordnung und ihre Quadratur.

Man nennt die Kurven von der Gleichung

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

Parabeln n^{ter} Ordnung.

Ist nur ein einziger Koeffizient verschieden von Null, handelt es sich also um

$$y = kx^n,$$

so heißt die Kurve ein einfache Parabel n^{ter} Ordnung.

Nach Teil II, Stereometrie Nr. 64 gilt von Flächen, die in der Höhe y die Querlinie

$$x = q_y = a + by + cy^2 + dy^3 + \cdots + ky^n$$

haben, auf Grund der Summenformel $\frac{1}{p+1}\sum_{p=1}^{p=\infty} n^p = \frac{1}{p+1}$, die für ganze positive p bewiesen worden ist, der Satz, daß der Flächeninhalt von der Höhe 0 bis zur Höhe y_1 ist,

$$\overset{y_1}{\underset{0}{F}} = a\frac{y_1}{1} + \frac{by_1^2}{2} + \frac{cy_1^3}{3} + \frac{dy_1^4}{4} + \cdots + \frac{ky_1^{n+1}}{n+1}.$$

Vertauscht man x mit y, so folgt z. B.

Die Fläche zwischen der x-Achse und der durch die Gleichung

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

dargestellten Kurve, von $x = 0$ bis $x = x_1$ gerechnet, ist

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = a\frac{x_1}{1} + \frac{bx_1^2}{2} + \frac{cx_1^3}{3} + \frac{dx_1^4}{4} + \cdots + \frac{kx_1^{n+1}}{n+1}.$$

Berechnet man auch $\overset{x_2}{\underset{0}{F}}$, wo $x_2 > x_1$ ist, so findet man durch Subtraktion

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \overset{x_2}{\underset{0}{F}} - \overset{x_1}{\underset{0}{F}} = a\frac{x_2 - x_1}{1} + b\frac{x_2^2 - x_1^2}{2} + c\frac{x_2^2 - x_1^2}{3} + \cdots + k\frac{x_2^{n+1} - x_1^{n+1}}{n+1},$$

oder auch, abgekürzt geschrieben:

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \left|\frac{ax}{1} + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \cdots + \frac{kx^{n+1}}{n+1}\right|_{x=x_1}^{x=x_2}.$$

5) Die Simpson-Newtonsche Regel.

Geht die Gleichung nicht über den dritten Grad hinaus, so kann man, wie in Teil II gezeigt ist, die Simpson-Newtonsche Regel anwenden, also ist z. B. für die Kurve

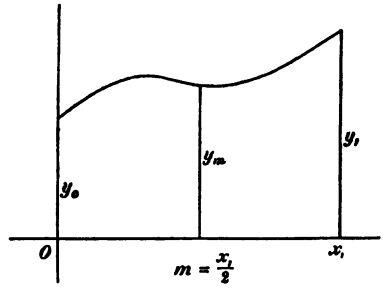
$$y = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

von $x = 0$ bis $x = x_1$ gerechnet,

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{x_1}{6}[y_0 + 4y_m + y_1].$$

Hier bedeutet y_m die Ordinate in der Mitte der Strecke x_1, d. h. bei $m = \frac{x_1}{2}$.

Fig. 123.



Ebenso ist

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \frac{x_2 - x_1}{6}[y_1 + 4y_m + y_2],$$

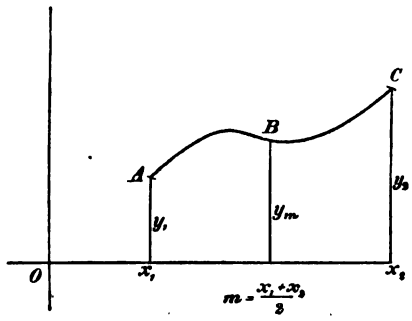
wo y_m das Lot an der Stelle $m = \frac{x_1 + x_2}{2}$ bedeutet.

Bemerkung. Durch die Punkte A, B und C läßt sich nur eine einzige Kurve von der Gleichung $y = a + by + cy^2$ legen, aber unendlich viele von der Gleichung 3^{ten} Grades

$$y = a + by + cy^2 + dy^3.$$

So vielgestaltig aber diese Kurven auch sein mögen, sämtlich geben sie zwischen x_1 und x_2 denselben Flächeninhalt.

Fig. 124.



Beispiel. Wie groß ist die Fläche der Kurve

$$y = 2 + 3x + 5x^2 + 6x^3$$

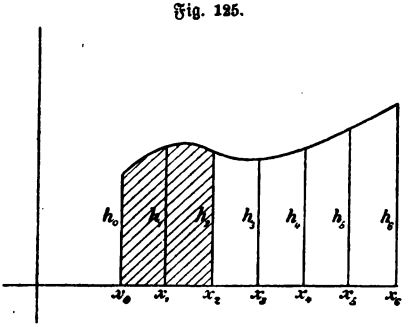
von $x = 0$ bis $x_1 = 2$?

Auflösung. Berechne y für $x = 0$, $x = \frac{2}{2} = 1$ und $x = 2$ als y_1, y_m und y_2 und wende dann die Simpson-Regel an.

Wie groß ist ferner die Fläche von $x_1 = 2$ bis $x_1 = 6$?

6) Verallgemeinerte Simpson-Regel. Während die Simpson-Regel in der Stereometrie weitgehende Anwendung findet, ist sie in der Geometrie weniger brauchbar. Zur Berechnung von sogenannten Diagrammflächen kann sie nicht gut direkt benutzt werden, wohl aber in einer Art von verallgemeinerter Gestalt.

Fig. 125.



Soll eine Kurvenfläche (zwischen X-Achse und Kurve gelegen) angenähert berechnet werden, obwohl die Kurve eine ganz willkürliche Gestalt hat, so teile man die Basis (von x_0 bis x_1) in eine gerade Anzahl gleicher Teile ein und lege durch die Teilpunkte Ordinaten. Für den ersten Doppelstreifen darf man, wenn die Breite nicht allzugroß ist, mit Annäherung die Simpson-Regel anwenden; ebenso für jeden folgenden. Man erhält z. B.

$$\overset{x_6}{\underset{x_0}{F}} = \frac{x_2 - x_0}{6}[h_0 + 4h_1 + h_2] + \frac{x_4 - x_2}{6}[h_2 + 4h_3 + h_4] + \frac{x_6 - x_4}{6}[h_4 + 4h_5 + h_6]$$

$$= \frac{x_6 - x_0}{6 \cdot 3}[h_0 + h_6 + 2(h_2 + h_4) + 4(h_1 + h_3 + h_5)].$$

Allgemein:

$$\overset{x_n}{\underset{x_0}{F}} = \frac{x_n - x_0}{6 \cdot \frac{n}{2}}[h_0 + h_n + 2(h_2 + h_4 + h_6 + \cdots + h_{n-2}) + 4(h_1 + h_3 + h_5 + \cdots + h_{n-1})].$$

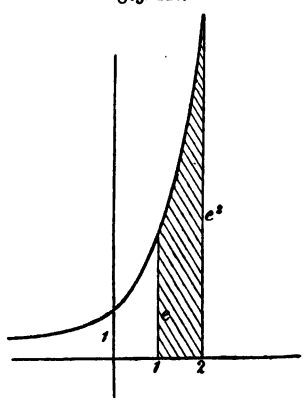
Diese Formel giebt weit genauere Resultate, als die aus der Berechnung der Trapeze hervorgehende Formel

$$\frac{x_n - x_0}{2n}[h_0 + 2(h_1 + h_2 + h_3 + \cdots + h_{n-1}) + h_n],$$

da schon die Parabeln 2ter Ordnung, die sich durch je drei aufeinanderfolgende Punkte legen lassen, sich der Kurve weit inniger anschmiegen, wie die Geraden. Sicher aber wird unter den unendlich zahlreichen Kurven der 3ten Ordnung irgend eine sein, die dies in besonders hohem Grades thut.

Beispiel. Die sogenannte logarithmische Kurve $y = e^x$ soll von $x_1 = 1$ bis $x_2 = 2$ angenähert berechnet werden.

Fig. 126.



Auflösung. Bei nur vier Streifen erhält man

$$\frac{2-1}{6 \cdot \frac{4}{2}}\left[e^1 + e^2 + 2\left(e^{\frac{6}{4}}\right) + 4\left(e^{\frac{5}{4}} + e^{\frac{7}{4}}\right)\right]$$

$$= \frac{e}{12}\left[1 + e + 2e^{\frac{2}{4}} + 4\left(e^{\frac{1}{4}} + e^{\frac{3}{4}}\right)\right]$$

$$= 4{,}670876.$$

Die genauere Rechnung giebt den Wert 4,670775.

Dagegen würde die Trapezrechnung bei gleicher Streifenzahl 4,695079 geben, was viel zu groß sein muß, da die Kurve von unten gesehen konvex ist.

7) Praktische Anwendungen.

Abgesehen von den in der Stereometrie angegebenen Anwendungen kann man die Summenformel zur Berechnung der statischen Momente, der Schwerpunkte und der Trägheitsmomente von gewissen Flächen benutzen. [Gewisse graphische Darstellungen, auch die sogenannten Indikator-Diagramme der Dampfmaschine, sind sehr bequem mit der Simpson-Regel zu behandeln.]

a) Statisches Moment, Schwerpunkt, Trägheitsmoment, Trägheitsmittelpunkt.

Die Gleichung einer Kurve sei

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^p.$$

Dann ist das statische Moment jeder Ordinate in Bezug auf die Y-Achse

$$M = y \cdot x = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \cdots + kx^{p+1},$$

folglich das der gesamten Fläche von 0 bis x_1

$$\overset{x_1}{\underset{0}{M}} = \frac{ax_1^2}{2} + \frac{bx_1^3}{3} + \frac{cx_1^4}{4} + \frac{dx_1^5}{5} + \cdots + \frac{kx_1^{p+2}}{p+2}.$$

Die Schwerpunktsentfernung berechnet sich aus „Fläche mal Hebelarm gleich dem statischen Momente", also aus

$$x_s \cdot \overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \overset{r_1}{\underset{0}{M}}$$

als

$$x_s = \frac{\overset{x_1}{\underset{0}{M}}}{\overset{x_1}{\underset{0}{F}}} = \frac{\frac{ax_1^2}{2} + \frac{bx_1^3}{3} + \frac{cx_1^4}{4} + \cdots + \frac{kx_1^{p+2}}{p+2}}{\frac{ax_1}{1} + \frac{bx_1^2}{2} + \frac{cx_1^3}{3} + \cdots + \frac{kx_1^{p+1}}{p+1}}.$$

[Ferner: Das Trägheitsmoment jeder Ordinate in Bezug auf die Y-Achse ist

$$T = yx^2 = ax^2 + bx^3 + cx^4 + \cdots + kx^{p+2},$$

also das der Fläche von 0 bis x_1

$$\overset{x_1}{\underset{0}{T}} = \frac{ax_1^3}{3} + \frac{bx_1^4}{4} + \frac{cx_1^5}{5} + \cdots + \frac{kx_1^{p+3}}{p+3}.$$

Der sogenannte Trägheitsmittelpunkt hat einen Abstand, der sich berechnet aus

$$x_t^2 \cdot \overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \overset{x_1}{\underset{0}{T}}$$

oder

$$x_t^2 = \frac{\overset{x_1}{\underset{0}{T}}}{\underset{0}{\overset{x_1}{F}}} = \frac{\frac{ax_1^3}{3} + \frac{bx_1^4}{4} + \frac{cx_1^5}{5} + \cdots + \frac{kx_1^{p+3}}{p+3}}{\frac{ax_1}{1} + \frac{bx_1^2}{2} + \frac{cx_1^3}{3} \pm \cdots + \frac{kx^{p+1}}{p+1}}.$$

Besonders häufig findet dies Anwendung auf die einfachen Parabeln höherer Ordnung, wie

$$y = cx^2, \quad y = dx^3, \quad y = ex^4, \quad \text{u. s. w.}$$

Bei $y = cx^2$ ergiebt sich

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{c \cdot x_1^3}{3},$$

was der 3te Teil des entsprechenden Rechtecks ist;

$$\overset{x_1}{\underset{0}{M}} = \frac{cx_1^4}{4}, \quad x_s = \frac{\frac{cx_1^4}{4}}{\frac{cx_1^3}{3}} = \frac{3}{4}x_1, \quad \overset{x_1}{\underset{0}{T}} = \frac{cx_1^5}{5}, \quad x_t^2 = \frac{\frac{cx_1^5}{5}}{\frac{cx_1^3}{3}} = \frac{3}{5}x_1^2.$$

Die Bedeutung dieser Dinge liegt in der Mechanik.]

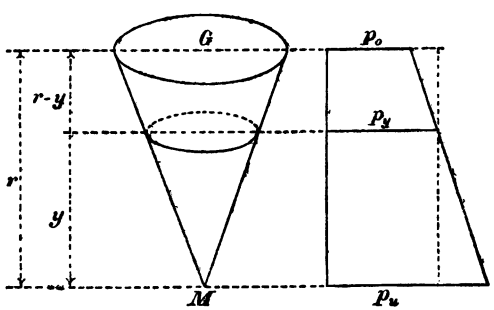
b) Eine kosmische Aufgabe.

Aufgabe. Das spezifische Gewicht der Erde sei an der Oberfläche 2,5 und im Durchschnitt 5,6. Nach der Mitte hin nehme es gleichmäßig zu. Wie groß ist es im Mittelpunkte?

Auflösung. Man denke sich einen Kegel (eigentlich Sektor) aus der Erdkugel geschnitten. Ist seine obere Fläche G, so hat er in Höhe y den Querschnitt

1) $G_y = G\frac{y^2}{r^2}$.

Fig. 127.



Ist das spezifische Gewicht unten p_u, oben p_o, so ergiebt sich für die Höhe y bei regelmäßiger Zunahme nach unten

$$(p_u - p_y) : y = (p_y - p_o) : (r - y),$$

folglich

2) $$p_y = p_u - y\frac{p_u - p_o}{r}.$$

Die Schicht in Höhe y fällt nach 1) und 2) ins Gewicht mit

$$G_y \cdot p_y = G\frac{p_u}{r^2}y^2 - G\frac{p_u - p_o}{r^3}y^3.$$

Für die Summe der Schichten von o bis y_1 giebt die Summenformel

3) $$G\frac{p_u}{r^2}\cdot\frac{y_1^3}{3} - G\frac{p_u - p_o}{r^3}\cdot\frac{y_1^4}{4},$$

also für $y_1 = r$

$$Gp_u\frac{r}{3} - G(p_u - p_o)\frac{r}{4} = \frac{Gr}{12}[4p_u - 3p_u + 3p_o] = \frac{Gr}{12}[p_u + 3p_o].$$

Der ganze Kegel fällt aber bei dem mittleren spezifischen Gewicht 5,6 mit $G\frac{r}{3}5{,}6$ ins Gewicht. Ist also $p_o = 2{,}5$, so hat man die Gleichung

$$\frac{Gr}{12}[p_u + 3\cdot 2{,}5] = \frac{Gr}{3}5{,}6,$$

also

4) $$p_u + 3\cdot 2{,}5 = 4\cdot 5{,}6, \quad p_u = 22{,}4 - 7{,}5 = \mathbf{14{,}9}.$$

Nach dieser Annahme wäre also das spezifische Gewicht im Erdcentrum $p' = 14{,}9$ zu setzen.

Selbstverständlich kann man beliebige andere Annahmen über die Zunahme des spezifischen Gewichtes nach der Mitte hin machen. Jede solche Annahme giebt ein anderes Resultat.

[Will man noch fragen, mit welcher Kraft dieser Kegel nach der Mitte der Erde gezogen wird, so ist zu beachten, daß die Anziehung von der Oberfläche bis zur Mitte hin nicht regelmäßig abnimmt. Letzteres findet nur bei der homogenen Kugel statt. Nach dem Newtonschen Gesetze wird hier der in der Hohlkugel befindliche Körper von dieser mit der Kraft Null angezogen, so daß in Entfernung y von der Mitte nur noch die Kugel mit Radius y wirkt. Jeder an der Kugel-Oberfläche 1 Tonne wiegende Körper wiegt in Entfernung y vom Centrum nur noch $\frac{r^3}{y^3}\cdot\frac{\frac{4}{3}y^3\pi}{\frac{4}{3}r^3\pi} = \frac{y}{r}$ Tonnen.

Handelt es sich nicht um einen Kegel, sondern um einen Cylind der sich nicht, wie der Kegel, in der umgebenden Erdmasse festke

und ist sein Querschnitt 1 qm, so wird er bei dem spezifischen Gewichte 5,6 von der Erde so angezogen, daß jede Meterschicht mit $5{,}6\,\frac{y}{r}$ Tonnen, der ganze Cylinder mit $\frac{5{,}6}{r}\cdot\frac{y^2}{2}$, d. h. für $y = r$ mit $\frac{5{,}6\,r}{2} = 2{,}8\,r = 2{,}8\cdot 860\cdot 7500 = 18\,060\,000$ Tonnen angezogen werden. Dies würde dann auch der Druck im Erdcentrum sein.

Wendet man zur Vermeidung naheliegender Versehen die nötige Vorsicht an, so kann man die Rechnung auch für die oben angenommene Massenverteilung durchführen.

Auch die Frage, mit welcher Geschwindigkeit ein Körper sich an jeder Stelle eines luftleeren Schachtes bewegen würde, der bis zum Mittelpunkte der Erde reicht, kann für beide Massenverteilungen beantwortet werden.

Man hat nur nötig, die Formel für die Stärke der Anziehung jeder Kugel mit Radius y an ihrer Oberfläche zu berechnen und für die entsprechende Parabel höherer Ordnung $\overset{r}{\underset{y}{F}}$ zu bilden. Dies ist aus Gründen der Mechanik gleich der gewonnenen Arbeitswucht $\frac{mv^2}{2}$ (lebendige Kraft) der angezogenen Masse m zu setzen, so daß man v für jede Stelle berechnen kann. Hier würde dies zu weit führen.]

8) Andeutungen über ganze rationale Funktionen*). (Tangentenproblem und Nullstellen.)

Nach Teil II, Anhang 8) liegen die höchsten und niedrigsten Stellen der Kurve

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

da, wo die Gleichung

$$b + 2cx + 3dx^2 + \cdots + nkx^{n-1} = 0$$

erfüllt ist. Dort sind die Tangenten der Kurve horizontal.

Da für uns vorläufig nur Gleichungen bis zum dritten Grade lösbar sind, so darf die Kurve zunächst den 4ten Grad noch nicht übersteigen.

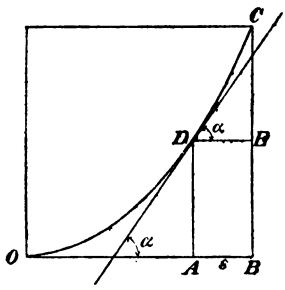
*) Anwendung sollen diese Andeutungen vorläufig nicht finden. Ihre sicht ist, zu zeigen, daß die Elemente zur erschöpfenden Behandlung des bietes nicht ausreichen. Es handelt sich also nicht etwa um Einführung : Differentialrechnung.

Beispiele. Wo liegen die Maxima und Minima der Kurven

$$y = 2 - 3x + 5x^2; \quad y = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3;$$
$$y = 2 - 3x + 4x^2 - 5x^3 + x^4?$$

Man kann nun die Frage stellen, welche Richtungen die Tangenten an jeder Stelle $x = x_1$ haben.

Fig. 128.



Zunächst handle es sich um die einfache Parabel höherer Ordnung $y = x^n$. In Figur 126 denke man sich für diese Kurve die Sehne DC gezeichnet. Es sei nun $OA = x$, also $AD = x^n$, es sei ferner $AB = \varepsilon$, also $OB = (x + \varepsilon)$ und $BC = (x + \varepsilon)^n$. Dann ist

$$\tan\alpha = \frac{EC}{DE} = \frac{BC - AD}{\varepsilon} = \frac{(x+\varepsilon)^n - x^n}{(x+\varepsilon) - x}.$$

Die Division läßt sich durchführen und giebt für ganzes positives n

$$\tan\alpha = (x+\varepsilon)^{n-1} + (x+\varepsilon)^{n-2}\cdot x + (x+\varepsilon)^{n-3}\cdot x^2 + \cdots + (x+\varepsilon)x^{n-2} + x^{n-1}.$$

Hier läßt sich jede Klammer nach dem binomischen Satze entwickeln, z. B.

$$(x+\varepsilon)^{n-1} = x^{n-1} + \frac{n-1}{1!}x^{n-1}\varepsilon + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}x^{n-3}\varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{n-1}.$$

Läßt man aber ε unendlich klein werden, so strebt diese Summe der Grenze x^{n-1} zu. Man darf aber ε bei endlichem n auch schon in der Reihe für $\tan\alpha$ streichen. Demnach hat $\tan\alpha$ für $\varepsilon = 0$ einen bestimmten Grenzwert

$$\tan\alpha = x^{n-1} + x^{n-2}\cdot x + x^{n-3}\cdot x^2 + \cdots + x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

Für $\varepsilon = 0$ wird aber die Sehne DC verschwindend klein, d. h. sie fällt mit der Tangente der Kurve zusammen. Folglich:

Die Parabel höherer Ordnung $y = x^n$ hat an der Stelle x eine Tangentenrichtung, die sich aus der Gleichung $\tan\alpha = nx^{n-1}$ ergiebt.

Zeige ebenso, daß es sich für die Kurve $y = bx^n$ um $\tan\alpha = nbx^{n-1}$ handelt. Für die Kurve $y = bx^m + cx^n$ handelt es sich ebenso um

$$\tan\alpha = \frac{[b(x+\varepsilon)^m + c(x+\varepsilon)^n] - (bx^m + cx^n)}{(x+\varepsilon) - x}$$

$$= b\frac{(x+\varepsilon)^m - x^m}{(x+\varepsilon) - x} + c\frac{(x+\varepsilon)^n - x^n}{(x+\varepsilon) - x},$$

also nach Obigen für $\varepsilon = 0$ um

$$\tan\alpha = mbx^{m-1} + ncx^{n-1},$$

für die Kurve

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

also um

$$\tan\alpha = b + 2cx + 3dx^2 + \cdots + nk^{n-1}.$$

Die Kenntnis dieses Satzes hat die Entwickelung der Mathematik in außerordentlicher Weise beeinflußt, da es nahe lag, den Wert von $\tan\alpha$ auch für **beliebige** Funktionen zu untersuchen.

Beispiel. Untersuche die Tangentenrichtung für $y = 2 + 3x - 5x^2$, $y = 3 - x + 2x^2 - 4x^3$ an den Stellen $x = 0, 1, 2, 3$, u. s. w.

Findet man Stellen, wo die Kurve

1) $$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

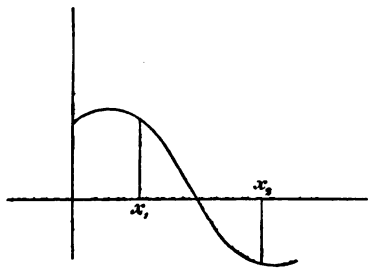
die X-Achse schneidet, so ist durch das betreffende x die Gleichung

2) $$0 = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

erfüllt, d. h. man hat eine **reelle Lösung** (Wurzel) der Gleichung 2) gefunden.

Wird die X-Achse von der Kurve nirgends geschnitten, so hat die Gleichung keine reellen Lösungen, sondern nur imaginäre oder komplexe.

Fig. 129.



Für jedes endliche reelle x hat die Kurve eine endliche Ordinate, aber nur diese eine. Ist also z. B. die Ordinate bei x_1 positiv, bei x_2 negativ, so muß die Kurve zwischen x_1 und x_2 die X-Achse geschnitten haben, d. h. zwischen x_1 und x_2 muß sich eine reelle Wurzel der Gleichung 2) befinden. Durch probeweises Einsetzen von solchen x, die zwischen x_1 und x_2 liegen, kann man sich der wirklichen Wurzel (durch Einschnürung) bis zu beliebiger Genauigkeit nähern.

Versuche dieses für die Gleichung $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$ mit Hülfe der Kurve $y = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$ auszuführen.

Man kann diese Dinge leicht übersehen, indem man sich Gleichungen mit vorgeschriebenen reellen Wurzeln bildet, z. B. $0 = (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - (1+2+3)x^2 + (1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 1)x - 1\cdot 2\cdot 3 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, und indem man die Kurve $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ für eine größere Zahl von Punkten wirklich konstruiert.

[Gelingt es zu beweisen, daß sich jede ganze rationale Funktion

$$y = a + bx + cx^2 + \cdots + kx^n$$

in ein Produkt von Faktoren ersten Grades von der Form

$$y = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdots(x-\lambda)$$

zerlegen läßt, so ist der Fundamentalsatz der höheren Algebra gefunden. Gauß ist es gelungen, ihn streng zu beweisen. Aus dem Satze folgt, daß, wenn man eine Wurzel α gefunden hat, die Funktion durch $(x-\alpha)$ ohne Rest teilbar ist und auf eine solche $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades zurückgeführt werden kann. Vergl. Teil II, Arithm. Nr. 76.]

Selbst wenn man von den letzten Andeutungen absieht, erkennt man, daß der binomische Satz und die mit ihm zusammenhängende Summenformel eine große Zahl von Aufgaben lösbar machen, die mit den ganzen rationalen Funktionen zusammenhängen. Das Ausschließen der imaginären und komplexen Koeffizienten und das Nichtbeweisen des Fundamentalsatzes der Algebra deutet aber darauf hin, daß erst die höhere Mathematik von allgemeineren Gesichtspunkten aus im Stande ist, die Lehre von der ganzen rationalen Funktion zum Abschluß zu bringen.

II. Die Funktion $y = \frac{1}{x}$ und die Quadratur der Hyperbel durch den natürlichen Logarithmus.

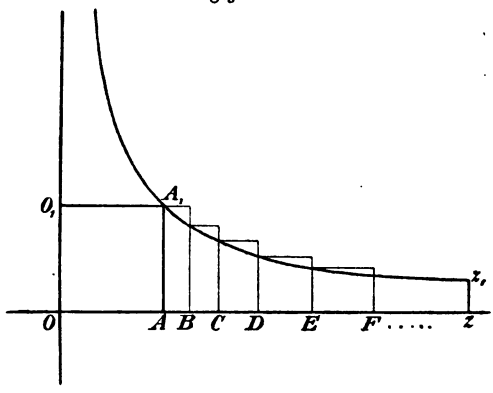
9) Quadratur der gleichseitigen Hyperbel.

Es handelt sich in diesem Abschnitte um die einfachste der gebrochenen rationalen Funktionen von x.

Nach Teil II, Kegelschn. Nr. 35 stellt die Gleichung $y = \frac{1}{x}$ eine gleichseitige Hyperbel dar, wobei die Koordinatenachsen mit den Asymptoten zusammenfallen.

Um die zwischen der einen Asymptote (d. h. der X-Achse) und der Hyperbel liegende Fläche von $x = 1$ bis $x = x_1$ zu berechnen, nehme man einen beliebigen echten Bruch $\frac{m}{n}$ an und mache

Fig. 130.



$$OA = 1,$$

$$OB = \left(1 + \frac{m}{n}\right),$$

$$OC = \left(1 + \frac{m}{n}\right)^2, \quad OD = \left(1 + \frac{m}{n}\right)^3, \quad \ldots, \quad OZ = \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n,$$

so daß die Abstände eine geometrische Reihe bilden. In den Teilpunkten errichte man die Ordinaten und vervollständige die Flächenstreifen nach Art der Figur zu Rechtecken. Die Grundlinien der letzteren sind der Reihe nach

$$AB = \frac{m}{n}, \quad BC = \frac{m}{n}\left(1 + \frac{m}{n}\right), \quad CD = \frac{m}{n}\left(1 + \frac{m}{n}\right)^2,$$

$$DE = \frac{m}{n}\left(1 + \frac{m}{n}\right)^3, \quad \ldots, \quad VZ = \frac{m}{n}\left(1 + \frac{m}{n}\right)^{n-1}.$$

Die Rechtecke haben die Höhen

$$1, \quad \frac{1}{1 + \frac{m}{n}}, \quad \frac{1}{\left(1 + \frac{m}{n}\right)^2}, \quad \frac{1}{\left(1 + \frac{m}{n}\right)^3}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{\left(1 + \frac{m}{n}\right)^{n-1}}.$$

Die Rechtecksinhalte sind

$$\frac{m}{n}, \quad \frac{m}{n}\left(1 + \frac{m}{n}\right)\frac{1}{1 + \frac{m}{n}}, \quad \frac{m}{n}\left(1 + \frac{m}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{m}{n}\right)^2}, \quad \ldots,$$

$$\frac{m}{n}\left(1 + \frac{m}{n}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{m}{n}\right)^{n-1}}.$$

Da also jedes Rechteck den Inhalt $\frac{m}{n}$ hat, so ist die Inhaltssumme der Rechtecke $\frac{m}{n} \cdot n = m$.

Nimmt man nun m endlich, aber n sehr groß (unendlich groß) an, so daß die Zahl der Streifen zwischen A und Z ebenfalls unendlich groß wird, so wird $OZ = \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n = e^m$, die übergreifenden Flächenräume verschwinden, und man erhält m als Hyperbelfläche von $x = 1$ bis $x = e^m = x_1$.

Hier ist $m = {}^e\lg x_1$. Folglich:

Die Hyperbelfläche von 1 bis x_1 ist

$$\overset{x_1}{\underset{1}{F}} = {}^e\lg x_1.$$

Zieht man diese ab von der größeren Hyperbelfläche (für $x_2 > x_1$)

$$\overset{x_2}{\underset{1}{F}} = {}^e\lg x_2,$$

so erhält man allgemeiner die Fläche von x_1 bis x_2 als

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = {}^e\lg x_2 - {}^e\lg x_1 = {}^e\lg \frac{x_2}{x_1}.$$

Dieselben Betrachtungen gelten für die Richtung von A nach O, nur müssen dann die Abstände der Teilpunkte von O nach geometrischer Reihe abnehmen, z. B.

$$1,\ \left(1 - \frac{m}{n}\right),\ \left(1 - \frac{m}{n}\right)^2,\ \left(1 - \frac{m}{n}\right)^3,\ \ldots,\ \left(1 - \frac{m}{n}\right)^n.$$

Folgerungen. a) Ist in Figur 131 OB mittlere Proportionale zwischen $OA = 1$ und OC, so ist die Fläche ACC_1A_1 durch BB_1 halbiert. Denn aus

$$OB^2 = OA \cdot OC = 1 \cdot OC$$

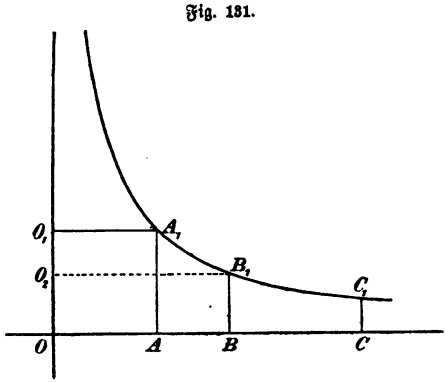
folgt $2 \lg OB = \lg OC$, also

$$\lg OB = \tfrac{1}{2} \lg OC,$$

d. h.

$$\overset{B}{\underset{1}{F}} = \tfrac{1}{2} \overset{C}{\underset{1}{F}}.$$

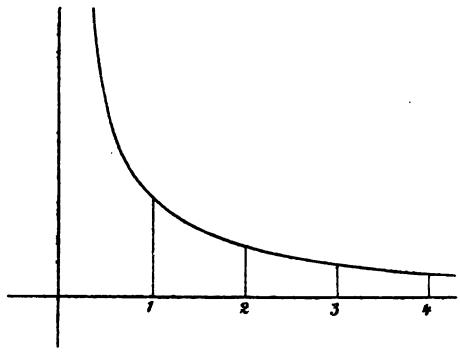
Fig. 131.



b) Folgen die Abstände OA, OB, OC u. s. w. in in geometrischer Reihe aufeinander so sind die zugehörigen Flächenstreifen einander gleich.

c) Die natürlichen Logarithmen der Zahlen (1), 2, 3, 4, ... verhalten sich wie die zugehörigen, von $x = 1$ aus gerechneten Flächenstücke. Wegen dieses Zusammenhanges werden die natürlichen Logarithmen auch als **hyperbolische** bezeichnet.

Fig. 132.



d) Für die Hyperbel $y = \frac{a}{x}$ erhält man die Formel

$$\int_{x_1}^{x_2} F = a \, {}^e\lg \frac{x_2}{x_1},$$

denn jede Ordinate ist jetzt das a-fache der entsprechenden früheren, so daß auch jeder Vertikalstreifen und ebenso die ganze Fläche das a-fache ist.

Während nun vorher das konstante Rechteck $= 1$ war ($OAA_1O_1 = OBB_1O_2 = 1$), so ist jetzt das konstante Rechteck gleich $a \cdot 1 = a$. Folglich:

Die Fläche von x_1 bis x_2 ist gleich dem Produkte aus dem konstanten Rechteck und dem ${}^e\lg \frac{x_2}{x_1}$.

10) **Ausdehnung auf andere Hyperbeln.**

Denkt man sich die Ebene der Figur unter einem Neigungswinkel α beliebig im Raume angebracht, und projiziert man sie senkrecht auf die Horizontalebene, so geht die Hyperbel wieder in eine Hyperbel, ihre Asymptoten wieder in Asymptoten (jedoch mit anderem Schnittwinkel) über und jede Fläche F verwandelt sich in $F \cos \alpha$. Folglich bleibt auch hier die Fläche ACC_1A_1 das ${}^e\lg \frac{OC}{OA}$-fache des konstanten Parallelogramms OAA_1O_1.

Fig. 133.

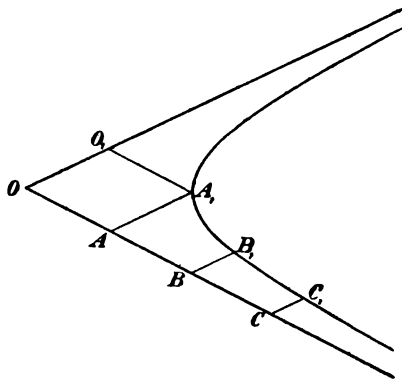
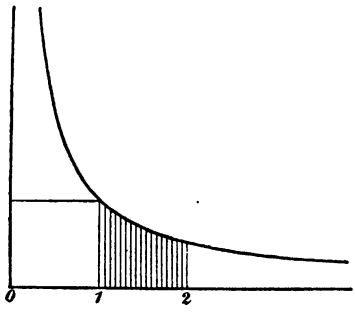


Fig. 134.



Entsprechendes geschieht bei schräger Parallelprojektion.

Mit Hülfe dieser Bemerkung lassen sich beliebige Segmente jeder Hyperbel berechnen. (Vgl. S. 47 bis 50.)

Mit Hülfe der gleichseitigen Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ lassen sich demnach die Logarithmen gegebener Zahlen mit beliebiger Genauigkeit berechnen, indem man das Diagramm in gleiche Flächenstreifen einteilt. Die Trapezformel giebt geringeren Genauigkeitsgrad, als die verallgemeinerte Simpson-Formel.

11) **Aufgabe.** Die natürlichen Logarithmen von 2, $\frac{5}{4}$ und 10 und den Modul der Briggschen Logarithmen angenähert zu berechnen.

Auflösung. Nimmt man 8 Streifen, so ist nach S. 127 angenähert

$$\lg 2 = \lg(1+1) = \int_1^2 F$$

$$= \frac{2-1}{6\cdot\frac{8}{2}}\left[1+\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{1+\frac{2}{8}}+\frac{1}{1+\frac{4}{8}}+\frac{1}{1+\frac{6}{8}}\right)+4\left(\frac{1}{1+\frac{1}{8}}+\frac{1}{1+\frac{3}{8}}+\frac{1}{1+\frac{5}{8}}+\frac{1}{1+\frac{7}{8}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+2\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{14}\right)+4\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right)\right] = 0{,}693158\ldots$$

Ebenso

$$\lg\tfrac{5}{4} = \lg\left(1+\tfrac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{\frac{5}{4}-1}{6\cdot\frac{8}{2}}\left[1+\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}}+2\left(\frac{1}{1+\frac{2}{32}}+\frac{1}{1+\frac{4}{32}}+\frac{1}{1+\frac{6}{32}}\right)+4\left(\frac{1}{1+\frac{1}{32}}+\frac{1}{1+\frac{3}{32}}+\frac{1}{1+\frac{5}{32}}+\frac{1}{1+\frac{7}{32}}\right)\right]$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{3}\left[\frac{1}{8}+2\left(\frac{1}{8+\frac{2}{4}}+\frac{1}{8+\frac{4}{4}}+\frac{1}{8+\frac{6}{4}}\right)+4\left(\frac{1}{8+\frac{1}{4}}+\frac{1}{8+\frac{3}{4}}+\frac{1}{8+\frac{7}{4}}\right)+\frac{1}{8+\frac{8}{4}}\right]$$

$$= 2{,}2231435\ldots$$

Daraus folgt

$$^e\lg 10 = {}^e\lg\left(\tfrac{10}{8}\cdot 2^3\right) = \lg\tfrac{5}{4} + 3\lg 2 = 2{,}3026\ldots,$$

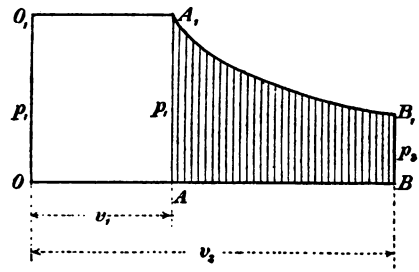
folglich

$$\text{Modul } m = \frac{1}{^e\lg 10} = 0{,}43429\ldots$$

Nimmt man eine größere Zahl von Streifen, so wird die Genauigkeit weit größer. Die Möglichkeit, die Logarithmen zu berechnen, darf damit als vorläufig sicher gestellt betrachtet werden.

12) Eine der wichtigsten Anwendungen dieser Formel ist die Berechnung der Expansions- und Kompressionsarbeit von Gasen unter Voraussetzung konstanter Temperatur, d. h. unter Zugrundelegung des Mariotteschen Gesetzes. (Vgl. Teil II, Geom. 105.)

Fig. 135.



Stellt p_1 die Anfangsspannung, v_1 das Anfangsvolumen dar, p_2 die Schlußspannung, v_2 das Schlußvolumen, so ist nach Mariotte

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{v_2}{v_1} \quad \text{oder} \quad p_1 v_1 = p_2 v_2.$$

Nun ist

$$OAA_1O_1 = p_1 v_1, \quad ABB_1A_1 = OAA_1O_1 \cdot {}^{e}\lg \frac{v_2}{v_1} = p_1 v_1 \, {}^{e}\lg \frac{v_2}{v_1}.$$

Folglich:

$$\textbf{Expansionsarbeit} = p_1 v_1 \, {}^{e}\lg \frac{v_2}{v_1} = p_1 v_1 \left({}^{10}\lg \frac{v_2}{v_1}\right) \cdot \frac{1}{m},$$

wo $m = 0{,}4342945$ der Modul der Briggschen Logarithmen ist.

Dieselbe Formel gilt für die Kompressionsarbeit, nur ist dabei $v_2 < v_1$. Bei Dampf- und Druckluft-Maschinen stellt OAA_1O_1 zugleich die leicht zu berechnende Volldruckarbeit V vor, ABB_1A_1 gleichfalls die Expansionsarbeit; setzt man l_1 und l_2 statt v_1 und v_2 (Volldruckhub und gesamter Hub des Kolbens), so wird die Gesamtarbeit $= V + V \cdot {}^{e}\lg \frac{l_2}{l_1} = V\left[1 + {}^{e}\lg \frac{l_2}{l_1}\right] = V\left[1 + \frac{1}{m} {}^{10}\lg \frac{l_2}{l_1}\right]$.

Rechnet man den Arbeitsdruck in Kilogrammen pro qm, die Hubhöhe in Metern, und ist n die Tourenzahl der Maschine in der Minute bei hin- und rückwirkendem Dampfdruck, so ist die theoretische Leistung der Maschine in Pferdestärken

$$N = \frac{2n}{60 \cdot 75} V\left[1 + \frac{1}{m} {}^{10}\lg \frac{l_2}{l_1}\right] = \frac{n}{2250} V\left[1 + \frac{1}{m} {}^{10}\lg \frac{l_2}{l_1}\right].$$

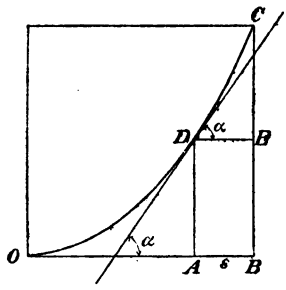
Das Dargestellte ist aber die Arbeit bezw. Leistungsfähigkeit unter der Annahme, daß jenseits des Kolbens sich ein luftleerer Raum

Beispiele. Wo liegen die Maxima und Minima der Kurven

$$y = 2 - 3x + 5x^3; \quad y = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3;$$
$$y = 2 - 3x + 4x^2 - 5x^3 + x^4?$$

Man kann nun die Frage stellen, welche Richtungen die Tangenten an jeder Stelle $x = x_1$ haben.

Fig. 128.



Zunächst handle es sich um die einfache Parabel höherer Ordnung $y = x^n$. In Figur 126 denke man sich für diese Kurve die Sehne DC gezeichnet. Es sei nun $OA = x$, also $AD = x^n$, es sei ferner $AB = \varepsilon$, also $OB = (x + \varepsilon)$ und $BC = (x + \varepsilon)^n$. Dann ist

$$\tan\alpha = \frac{EC}{DE} = \frac{BC - AD}{\varepsilon} = \frac{(x+\varepsilon)^n - x^n}{(x+\varepsilon) - x}.$$

Die Division läßt sich durchführen und giebt für ganzes positives n

$$\tan\alpha = (x+\varepsilon)^{n-1} + (x+\varepsilon)^{n-2}\cdot x + (x+\varepsilon)^{n-3}\cdot x^2 + \cdots + (x+\varepsilon)x^{n-2} + x^{n-1}.$$

Hier läßt sich jede Klammer nach dem binomischen Satze entwickeln, z. B.

$$(x+\varepsilon)^{n-1} = x^{n-1} + \frac{n-1}{1!}x^{n-1}\varepsilon + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}x^{n-2}\varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{n-1}.$$

Läßt man aber ε unendlich klein werden, so strebt diese Summe der Grenze x^{n-1} zu. Man darf aber ε bei endlichem n auch schon in der Reihe für $\tan\alpha$ streichen. Demnach hat $\tan\alpha$ für $\varepsilon = 0$ einen bestimmten Grenzwert

$$\tan\alpha = x^{n-1} + x^{n-2}\cdot x + x^{n-3}\cdot x^2 + \cdots + x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

Für $\varepsilon = 0$ wird aber die Sehne DC verschwindend klein, d. h. sie fällt mit der Tangente der Kurve zusammen. Folglich:

Die Parabel höherer Ordnung $y = x^n$ hat an der Stelle x eine Tangentenrichtung, die sich aus der Gleichung $\tan\alpha = nx^{n-1}$ ergiebt.

Zeige ebenso, daß es sich für die Kurve $y = bx^n$ um $\tan\alpha = nbx^{n-1}$ handelt. Für die Kurve $y = bx^m + cx^n$ handelt es sich ebenso um

$$\tan\alpha = \frac{[b(x+\varepsilon)^m + c(x+\varepsilon)^n] - (bx^m + cx^n)}{(x+\varepsilon) - x}$$

$$= b\frac{(x+\varepsilon)^m - x^m}{(x+\varepsilon) - x} + c\frac{(x+\varepsilon)^n - x^n}{(x+\varepsilon) - x},$$

also nach Obigen für $\varepsilon = 0$ um

$$\tan\alpha = mbx^{m-1} + ncx^{n-1},$$

für die Kurve

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

also um

$$\tan\alpha = b + 2cx + 3dx^2 + \cdots + nk^{n-1}.$$

Die Kenntnis dieses Satzes hat die Entwickelung der Mathematik in außerordentlicher Weise beeinflußt, da es nahe lag, den Wert von $\tan\alpha$ auch für beliebige Funktionen zu untersuchen.

Beispiel. Untersuche die Tangentenrichtung für $y = 2 + 3x - 5x^2$, $y = 3 - x + 2x^2 - 4x^3$ an den Stellen $x = 0, 1, 2, 3$, u. s. w.

Findet man Stellen, wo die Kurve

1) $$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

die X-Achse schneidet, so ist durch das betreffende x die Gleichung

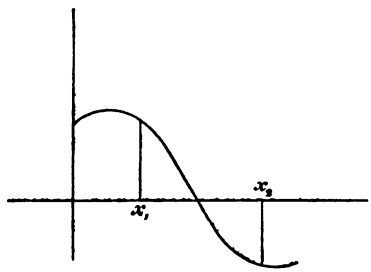
2) $$0 = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

erfüllt, d. h. man hat eine reelle Lösung (Wurzel) der Gleichung 2) gefunden.

Wird die X-Achse von der Kurve nirgends geschnitten, so hat die Gleichung keine reellen Lösungen, sondern nur imaginäre oder komplexe.

Für jedes endliche reelle x hat die Kurve eine endliche Ordinate, aber nur diese eine. Ist also z. B. die Ordinate bei x_1 positiv, bei x_2 negativ, so muß die Kurve zwischen x_1 und x_2 die X-Achse geschnitten haben, d. h. zwischen x_1 und x_2 muß sich eine reelle Wurzel der Gleichung 2) befinden. Durch probeweises Einsetzen von solchen x, die zwischen x_1 und x_2 liegen, kann man sich der wirklichen Wurzel (durch Einschnürung) bis zu beliebiger Genauigkeit nähern.

Fig. 129.



Auflösung. Man denke sich den Cylinderkolben von 1 qm Querschnitt und 1 m Gesamthub. Die obige Formel giebt dann die theoretische Leistungsfähigkeit von 95,5 Pferdestärken, $151\frac{1}{3}$ Pferdestärken, 191 Pferdestärken für die treibende Maschine.

---

13) Bemerkung über rationale gebrochene Funktionen. Gewisse rationale gebrochene Funktionen lassen sich auf ganze rationale zurückführen, z. B.

$$f(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1.$$

Diese können also nach Abschnitt I behandelt werden. So ist z. B. nach der Summenformel für die Kurve $y = \frac{x^n - 1}{x - 1}$

$$\overset{x_1}{F}_0 = \frac{x_1^n}{n} + \frac{x_1^{n-1}}{n-1} + \frac{x_1^{n-2}}{n-2} + \cdots + \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1}{1}.$$

Bei anderen aber geht die Division nicht auf, z. B. bei

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \left(\frac{x^{n+1}}{1-x}\right).$$

Darf man das Restglied für $n = \infty$ vernachlässigen, so hat man eine konvergente unendliche Reihe, mit deren Gliedern vermutlich ebenso verfahren werden darf, wie mit einer ganzen rationalen Funktion. Diese Berechtigung ist genau zu untersuchen. Hat aber das Restglied nicht die Grenze 0, so ist die unendliche Reihe unbrauchbar.

Um also einen Fortschritt zu ermöglichen, hat man die Theorie der unendlichen Reihen aufzustellen. Dies soll im folgenden Abschnitte angebahnt werden.

III. Allgemeines über die unendlichen Reihen.

a) Rückblick auf die bereits bekannten Reihen.

14) In Folgendem soll unter „Reihe" im Allgemeinen eine „unendliche Reihe" verstanden werden.

In Teil II wurden folgende Reihen summiert:

1) Die geometrische Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x}, \text{ jedoch nur für } -1 < x < +1.$$

2) Die Exponential-Reihe

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = e^x, \text{ für jedes beliebige } x.$$

3) Die Sinus-Reihe

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sin x, \text{ für jeden beliebigen Bogen } x.$$

4) Die Cosinus-Reihe

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \cos x, \text{ für jeden beliebigen Bogen } x.$$

5) Die Reihe der potenzierten Zahlen:

$$\frac{1}{n^{p+1}} \sum_{m=1}^{m=n=\infty} m^p = \frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},$$

für $n = \infty$ und zunächst nur für ganzes positives p.

15) Die Frage, ob die letztgenannte Reihe auch für gebrochenes p eine Summe hat, kann vorläufig nur teilweise auf geometrischem Wege untersucht werden.

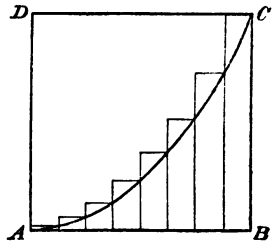
Figur 137 stellt ein Quadrat von der Seite 1 mit der einbeschriebenen Parabel $y = x^2$ dar. Die Basis ist in n gleiche Teile eingeteilt, und die zu Rechtecken vervollständigten Streifen haben die Inhaltssumme

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2,$$

oder, für $n = \infty$,

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

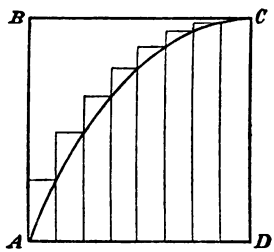
Fig. 137.



Da für $n = \infty$ die Treppenräume wegfallen, so ist das Quadrat durch die Parabel in die Flächenräume $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ eingeteilt.

Klappt man die Figur um die Diagonale AC, wodurch x und y vertauscht werden, so hat man die Parabel $x = y^2$ oder $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ mit horizontaler Achse.

Fig. 138.



Teilt man die Basis wieder in n gleiche Teile ein, so haben die entsprechenden Ordinaten der Reihe nach die Längen

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}},\quad \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}},\quad \left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{2}},\quad \cdots,\quad \left(\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{2}},$$

die Inhaltssumme der zu Rechtecken ergänzten Streifen ist

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{2}},$$

oder

$$\frac{1^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} + \cdots + n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}+1}}.$$

Für $n = \infty$ fallen die übergreifenden Treppenräume weg, und die schraffierte Fläche wird nach Obigem gleich $\frac{2}{3} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}$. Folglich:

Für $n = \infty$ ist

$$\frac{1^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} + \cdots + n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}+1}} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}.$$

In derselben Weise zeigt man, daß die Parabel höherer Ordnung $y = x^p$ für ganzes positives p den $(p+1)^{\text{ten}}$ Teil von der Quadratfläche 1 abschneidet, so daß der Rest

$$1 - \frac{1}{p+1} = \frac{p}{p+1} = \frac{1}{\frac{1}{p}+1}$$

bleibt. Die um die Diagonale AC geklappte Figur giebt die Kurve $x = y^p$ oder $y = x^{\frac{1}{p}}$. Die neue Streifeneinteilung zeigt, daß für $n = \infty$ wiederum ist

$$\frac{1^{\frac{1}{p}} + 2^{\frac{1}{p}} + 3^{\frac{1}{p}} + \cdots + n^{\frac{1}{p}}}{n^{\frac{1}{p}+1}} = \frac{1}{\frac{1}{p}+1},$$

sobald p ganz und positiv ist.

Demnach läßt sich die Formel

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{x_1^{p+1}}{p+1}$$

auch dann auf die Kurve $y = x^p$ anwenden, wenn $p = \frac{1}{m}$ und m eine ganze Zahl ist. So ist z. B. für die Kurve $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$$\int_0^{x_1} F = \frac{x_1^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{4} x_1^{\frac{4}{3}}.$$

Schon darin liegt eine bedeutende Erweiterung.

Später aber soll gezeigt werden, daß die wichtige Formel 5 und damit auch die Flächenformel für beliebige Exponenten richtig bleibt, sobald diese nur größer als -1 sind.

b) Einiges über Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen mit lauter positiven Gliedern.

16) Nach Obigem giebt es Reihen, die für jeden beliebigen Wert der maßgebenden Größe x konvergent sind, wie z. B. die Exponentialreihe. Andere sind nur innerhalb gewisser Grenzen konvergent, wie z. B. die geometrische Reihe, andere stets divergent.

a) Eine Reihe ist divergent, sobald ihre Glieder zunehmen, oder gleich groß bleiben, oder wenn diese, obwohl sie abnehmen, stets über einer endlichen Größe bleiben.

So ist z. B. die Reihe

$$2 + \left(1\tfrac{1}{2}\right) + \left(1\tfrac{1}{4}\right) + \left(1\tfrac{1}{8}\right) + \left(1\tfrac{1}{16}\right) + \left(1\tfrac{1}{32}\right) + \cdots$$

divergent, weil die Glieder stets größer bleiben, als 1.

b) Selbst wenn die Glieder sich der Grenze Null unbegrenzt nähern, braucht die Reihe nicht konvergent zu sein.

So ist z. B. die sogenannte harmonische Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \cdots$$

divergent, was man an folgender Gruppierung erkennt:

$$1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{16}\right) + \cdots$$

Hier hat jede Gruppe doppelt so viele Glieder, wie die vorhergehende. Die erste Klammer ist größer als $2 \cdot \frac{1}{4}$, die zweite größer als $4 \cdot \frac{1}{8}$, die folgende größer als $8 \cdot \frac{1}{16}$ u. s. w., jede Klammer also größer

als $\frac{1}{2}$. Weil in der neuen Reihe jedes Glied größer als $\frac{1}{2}$ ist, muß sie divergieren.

Wie weit man also die harmonische Reihe auch summiere, stets bleibt der Rest größer als 1 oder eine andere endliche Zahl.

c) Diese Betrachtung führt auf folgendes Kriterium der Konvergenz: Eine Reihe konvergiert, wenn man den Rest, der nach der Summierung der n ersten Glieder übrig bleibt, dadurch beliebig klein machen kann, daß man n größer und größer macht.

Die Reihe zerfällt dann in zwei Teile, $s = s_n + r_n$, wo s_n die endliche Summe der n ersten Glieder, r_n die der Restglieder bezeichnet. Man nennt s_n das summatorische Glied, r_n das Restglied. Letzteres strebt der Grenze Null zu, ersteres einer bestimmten Grenze s, die mit der Summe der Reihe identisch ist.

Das Entscheidende für die Konvergenz ist also nicht die Abnahme der einzelnen Glieder bis zu unendlicher Kleinheit, sondern die Abnahme der gesamten Restsumme bis zu unendlicher Kleinheit, d. h. bis zur Null.

d) Ein zweites Kriterium beruht auf dem Prinzip der Reihenvergleichung, z. B. an dem Vergleich mit der geometrischen Reihe.

Ist in einer unendlichen Reihe von einer bestimmten Stelle an jedes Glied kleiner, als das entsprechende einer konvergenten Reihe, so ist auch die erstere Reihe konvergent.

Weil nämlich der Rest der Hülfsreihe der Grenze Null zustrebt, so kann der Rest der andern Reihe keiner größeren Grenze zustreben.

e) Mit Hülfe der geometrischen Reihe ergiebt sich ein neues Kriterium. Bleibt der Quotient des $(n+1)^{\text{ten}}$ und n^{ten} Gliedes von einer bestimmten Stelle ab angebbar kleiner als 1, so ist die Reihe konvergent.

Bleibt z. B. von einer bestimmten Stelle ab $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 0{,}999$, so konvergiert die Reihe von dort ab in höherem Grade, als die geometrische Reihe

$$a_n + 0{,}999\, a_n + 0{,}999^2 a_n + 0{,}999^3 a_n + 0{,}999^4 a_n + \cdots$$
$$= \frac{a_n}{1 - 0{,}999} = 1000\, a_n,$$

bei der $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ stets gleich 0,999 ist. Die Glieder der zu untersuchenden Reihe sind eben von der betreffenden Stelle ab kleiner, als die der geometrischen Hülfsreihe. — Die harmonische Reihe ist nicht

konvergent, denn bei ihr ist $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ für $n = \infty$ gleich 1, also nicht angebbar kleiner als 1.

f) Die genannten Kriterien sind durchaus nicht ausreichend zur wissenschaftlichen Begründung der Reihenlehre, sondern nur für das auf der höheren Schule zu behandelnde Gebiet derselben. Denn erstens bleibt in der Regel der Grenzfall selbst zweifelhaft; eine Reihe kann z. B. für $x < 1$ konvergent und für $x > 1$ divergent sein. Dann ist noch eine besondere Untersuchung des Falles $x = 1$ nötig, für den entweder das eine, oder das andere eintritt, oder etwa der Zweifel bestehen bleiben kann. Zweitens könnte es Reihen geben, die konvergent sind, obwohl die obigen Kriterien an ihnen nicht erkennbar sind. So ist z. B. nach Euler

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

obwohl $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2+2n+1} = \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$ für $n = \infty$ der Grenze 1 zustrebt.

Es handelt sich also um eine Reihe, bei der $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ schließlich nicht mehr angebbar kleiner ist, als 1, und die trotzdem konvergiert.

Ebenso ist $\sum_1^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ und $\sum_1^\infty \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$. Die Beweise für diese Summierungen gehen über den Bereich der Schule hinaus. Es handelt sich hier nur um Beispiele für die schwierigeren Fälle.

g) Ist eine Reihe als konvergent nachgewiesen, so kann man jedes ihrer Glieder mit einer konstanten Größe k multiplizieren, ohne daß die Konvergenz verloren geht. Die neue Summe ist ks, wenn s die Summe der ursprünglichen Reihe ist.

Multipliziert man jedes der Glieder mit einer beliebigen positiven Zahl, bleiben aber die verschiedenen Faktoren kleiner als eine endliche Zahl k, so bleibt die Reihe konvergent, und ihre Summe ist kleiner als ks.

So ergiebt z. B. die Multiplikation des endlosen Dezimalbruchs

$$0{,}1111111\cdots = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots = \frac{1}{9}$$

mit 5 den endlosen Dezimalbruch

$$0{,}5555555\cdots = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \cdots = \frac{5}{9},$$

also das 5-fache.

Dagegen giebt die Multiplikation der einzelnen Glieder mit ganz beliebigen einstelligen Zahlen (die sämtlich nicht größer als 9 werden) einen im allgemeinen irrationalen Dezimalbruch, dessen Summe endlich und kleiner ist als der 9-fache Bruch, oder als der Bruch, den man erhält, wenn man die Stelle, bei der man abbricht, um 1 erhöht. So ist z. B.

$$3\cdot 1 + 1\cdot\tfrac{1}{10} + 4\cdot\tfrac{1}{100} + 1\cdot\tfrac{1}{1000} + 5\cdot\tfrac{1}{10\,000} + 9\cdot\tfrac{1}{100\,000} + \cdots\cdot$$
$$= \pi = 3{,}14159\ldots < 3{,}14160.$$

17) Für eine konvergente Reihe sei die Summe

$$s = s_n + r_n,$$

wo s_n das summatorische Glied (die Summe der n ersten Glieder), r_n die Restsumme bezeichnet. Für eine zweite sei ebenso

$$\sigma = \sigma_n + \varrho_n.$$

Addition beider Reihen giebt

$$s + \sigma = s_n + \sigma_n + (r_n + \varrho_n).$$

Weil nun sowohl r_n als auch ϱ_n für $n = \infty$ der Grenze Null zustreben, so folgt, daß die durch Summierung entstandene Reihe ebenfalls konvergent ist, und daß ihre Summe gleich der Summe der beiden ursprünglichen Reihen ist.

Dasselbe gilt von der Subtraktion.

Durch Multiplikation der einzelnen Glieder beider Reihen erhält man

$$(s_n + r_n)(\sigma_n + \varrho_n) = s_n\sigma_n + r_n s_n + \varrho_n s_n + r_n\varrho_n.$$

Weil s_n endlich ist, r_n aber mit wachsenden n der Null zustrebt, so kann für $n = \infty$ $r_n s_n$ gestrichen werden. Dasselbe gilt von $\varrho_n s_n$. Endlich kann $r_n\varrho_n$ gestrichen werden, weil beide Faktoren der Null zustreben. Demnach ist die durch Multiplikation entstandene Reihe konvergent und ihre Summe ist gleich dem Produkte der Summen der beiden ursprünglichen Reihen.

Durch Division erhält man

$$\frac{s_n + r_n}{\sigma_n + \varrho_n} = \frac{\frac{s_n}{\sigma_n} + \frac{r_n}{\sigma_n}}{\frac{\sigma_n}{\sigma_n} + \frac{\varrho_n}{\sigma_n}}.$$

Wenn r_n und ϱ_n der Null zustreben, σ_n aber endlich ist, so kann man $\frac{r_n}{\sigma_n}$ und $\frac{\varrho_n}{\sigma_n}$ für $n = \infty$ streichen. Da ferner $\frac{\sigma_n}{\sigma_n} = 1$ ist, so bleibt rechts stehen $\frac{s_n}{\sigma_n}$.

Also: Mit konvergenten Reihen, die nur positive Glieder haben, kann man die Addition und Subtraktion, die Multiplikation und Division, folglich auch die Potenzierung und die Radicierung ebenso vornehmen, wie mit gewöhnlichen Zahlen. Die neuen Reihen sind stets konvergent und ihre Summe ist bekannt, wenn sie für die gegebenen bekannt war. Dasselbe gilt von allen Rechnungsarten, die aus den genannten sich ableiten lassen.

c) Einiges über Reihen, die auch negative Glieder enthalten.

18) a) Eine Reihe mit unendlich vielen positiven und unendlich vielen negativen Gliedern ist unbedingt konvergent, wenn die positiven für sich eine konvergente Reihe bilden und die absoluten Beträge der negativen dasselbe thun. Denn man darf dann beide Hülfsreihen durch Subtraktion mit einander verbinden.

b) Sie ist ferner unbedingt konvergent, wenn die Summe der absoluten Beträge beliebig vieler Restglieder dadurch beliebig klein gemacht werden kann, daß man die Anzahl n der summierten Glieder (die s_n geben) groß genug macht.

c) Sie ist ferner unbedingt konvergent, wenn die Reihe der absoluten Beträge sämtlicher Glieder eine konvergente Reihe bildet.

d) Sie ist endlich unbedingt konvergent, wenn der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ von einem gewissen Gliede ab angebbar kleiner ist, als 1.

Die Beweise beruhen auf der Vergleichung mit den vorher behandelten Reihen.

e) Hat die Reihe abwechselnde Vorzeichen, so reicht es für die Konvergenz vorläufig aus, daß die Glieder zu unendlicher Kleinheit abnehmen. (Konvergente oscillierende Reihen.)

So ist z. B. in der hier geschriebenen Reihenfolge

$$s = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \cdots$$

eine konvergente Reihe.

Gruppiert man nämlich folgendermaßen:

$$1 - \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) - \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}\right) - \left(\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{7}\right) - \left(\tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{9}\right) - \cdots,$$

so erhält man die Reihe

$$1 - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{20} - \tfrac{1}{42} - \tfrac{1}{72} - \cdots,$$

in der man, wenn man abbricht, stets eine zu große Summe hat.

Gruppiert man dagegen in der Form

$$\left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6}\right) + \left(\tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8}\right) + \cdots$$

d. h.

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{30} + \tfrac{1}{56} + \cdots,$$

so erhält man eine zu kleine Summe, wenn man irgendwo abbricht.

Die ursprüngliche Reihe wird also zwischen immer engere Grenzen eingeschnürt, je weiter man geht. Es fragt sich, ob sich die Grenzen unbegrenzt nähern.

s_{2n+1} ist zu groß, s_{2n} ist zu klein; da aber

$$s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1},$$

so ist für unendlich großes n $s_{2n+1} = s_{2n}$, d. h. die obere und untere Grenze nähern sich demselben Werte.

Die zu großen Werte sind der Reihe nach

$$1, \quad 0{,}83333\ldots, \quad 0{,}783333\ldots, \quad \ldots$$

die zu kleinen

$$\tfrac{1}{2}, \quad 0{,}58333\ldots, \quad 0{,}616666\ldots, \quad \ldots$$

Die Reihe ist aber nicht unbedingt konvergent, **denn die Summe hängt durchaus von der Anordnung der Glieder ab.**

Gruppiert man nämlich folgendermaßen:

$$\sigma = \left(1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{6}\right) + \left(\tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{15} - \tfrac{1}{7}\right) + \cdots,$$

so daß auf zwei positive Glieder stets nur ein negatives folgt, so enthält die Reihe allerdings dieselben Glieder, wie vorher. Geht man aber bis zum $2n^{\text{ten}}$ Gliede, so hat man im ersten Falle gleichviel positive, wie negative Glieder, im andern Falle aber doppelt so viel positive, als negative. Vorher war s der Grenzwert von

$$s_n = \left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}\right),$$

jetzt dagegen ist σ der Grenzwert von

$$\sigma_n = \left(1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right).$$

Die Differenz ist

$$\sigma_n - s_n$$

$$= \tfrac{1}{4} + \left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)\right]^{*}).$$

Für unendlich viele Glieder erhält man die Grenze

$$\sigma - s = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \cdots\right] = \tfrac{1}{2}s.$$

Folglich ist

$$\sigma = \tfrac{3}{2}s.$$

Die Summe der Reihe hängt also wirklich von der Anordnung der Glieder ab. Deshalb sagt man, sie sei nicht unbedingt, sondern nur bedingt konvergent. Jeder Art gesetzmäßiger Anordnung entspricht eine besondere Summe.

19) Mit Reihen von nur bedingter Konvergenz muß man also ganz besonders vorsichtig sein. Die Vorsicht war bei dem Beispiele nötig, weil weder das Kriterium c), noch das Kriterium d) erfüllt war. ($\infty - \infty$ ist unbestimmt.)

Auch darauf sei aufmerksam gemacht, daß, wenn man die Glieder der betrachteten Reihe abwechselnd mit $+1$ und -1 multipliziert, die divergente harmonische Reihe entsteht. Dieselbe Operation würde eine unbedingt konvergente Reihe wiederum in eine unbedingt konvergente verwandeln. Hier aber geht die Konvergenz verloren. Man erkennt an dieser Stelle einen wichtigen Unterschied zwischen Reihen von endlicher und solchen von unendlicher Gliederzahl. Bei Reihen von endlicher Gliederzahl ist die Anordnung der Glieder gleichgültig; bei unendlichen Reihen ist sie nur gleichgültig für den Fall unbedingter Konvergenz, dagegen ist sie von Einfluß für den

*) Jede Einzelklammer ist in sich umgeformt worden, indem man ihre beiden letzten Glieder vereinigt hat.

Fall der nur bedingten Konvergenz. Von den für endliche Gliederzahl gültigen Gesetzen darf man also nicht ohne weiteres auf unendliche Reihen Anwendung machen.

Mit unbedingt konvergenten Reihen kann man sämtliche Rechnungsoperationen unbeirrt vornehmen; mit divergenten und nur bedingt konvergenten kann man aber nicht rechnen, wie mit geschlossenen Ausdrücken.

20) Nur noch einer besonderen Art von divergenten Reihen sei gedacht, der divergenten oscillierenden Reihen. Dies sind Reihen mit abwechselnden Vorzeichen, bei denen die Glieder entweder konstant sind, oder abnehmen, jedoch stets über einem bestimmten endlichen Werte bleiben. Solche Reihen sind z. B.

$$a + b - b + b - b + b - b + \cdots,$$

oder

$$4 - 3 + 2\tfrac{1}{2} - 2\tfrac{1}{4} + 2\tfrac{1}{8} - 2\tfrac{1}{16} + 2\tfrac{1}{32} - 2\tfrac{1}{64} + 2\tfrac{1}{128} + \cdots.$$

In der letzteren Reihe nähert sich die Schwankung immer mehr der Schwankung um ± 2. Die Summe ist also unbestimmt.

21) Reihen von der Form

$$s = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \cdots$$

bezeichnet man als Potenzreihen. Die konstanten Faktoren a, b, c, d, ... können willkürlich sein, oder nach einem bestimmten Gesetze auf einander folgen. (Von negativen und gebrochenen Exponenten soll jetzt abgesehen werden, obwohl auch $a + bx^{-1} + bx^{-2} + bx^{-3} + \cdots$ und $a + bx^{\frac{1}{2}} + bx^{\frac{3}{2}} + \cdots$ hierher gehören.)

Drei Hauptfälle sind möglich: 1) Divergenz für jeden Wert von x; 2) Konvergenz für Werte von x, die zwischen zwei Grenzen liegen; 3) Konvergenz für alle Werte von x.

Beispiel zu 1. Die Reihe

$$1!x + 2!x^2 + 3!x^3 + 4!x^4 + 5!x^5 + \cdots$$

divergiert für jeden Wert von x, denn es ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!x^n}{(n-1)!x^{n-1}} = nx.$$

Ist nun x auch noch so klein, das zunehmende n bewirkt schließlich, daß der absolute Wert von $n \cdot x > 1$ wird. Von da ab nehmen die Glieder der Reihe zu, und sie ist divergent.

Beispiel zu 2. Die Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

konvergiert für $-1 < x < 1$.

Beispiel zu 3. Die Reihe

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

ist für jeden beliebigen Wert von x konvergent. Denn es ist von einem gewissen Gliede ab auch für noch so großes x der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{n}$ absolut genommen kleiner als 1.

22) Sind nun z. B.

$$s = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \cdots$$
$$s_1 = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3 + e_1 x^4 + \cdots$$

zwei konvergente Potenzreihen, und liegt x für **beide** Reihen innerhalb der Konvergenzgrenzen, so sind nach Obigem folgende Rechnungsoperationen und Gleichsetzungen gestattet:

$$s + s_1 = (a + a_1) + (b + b_1)x + (c + c_1)x^2 + (d + d_1)x^3 + \cdots,$$

$$s - s_1 = (a - a_1) + (b - b_1)x + (c - c_1)x^2 + (d - d_1)x^3 + \cdots,$$

$$s \cdot s_1 = aa_1 + (ab_1 + ba_1)x + (ac_1 + bb_1 + ca_1)x^2 + (ad_1 + bc_1 + cb_1 + da_1)x^3 + \cdots.$$

Ebenso folgt aus der rein mechanischen Ausrechnung mit Hülfe des gewöhnlichen Divisionsschemas

$$s : s_1 = (a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots) : (a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3 + \cdots)$$
$$= \frac{a}{a_1} + \frac{a_1 b - ab_1}{a_1^2} x + \frac{a_1(a_1 c - ac_1) - b_1(a_1 b - ab_1)}{a_1^3} x^2 + \cdots.$$

Ferner ist

$$s^2 = a^2 + 2abx + (b^2 + 2ac)x^2 + (2ad + 2bc)x^3 + (c^2 + 2ae + 2bd)x^4 + \cdots.$$

Auch andere Potenzierungen und ebenso die Wurzelausziehungen sind gestattet. So ist z. B. das Rechnen mit endlosen irrationalen Dezimalbrüchen erlaubt.

Im folgenden Abschnitte soll eine Potenzreihe von besonderer Wichtigkeit behandelt werden.

Sind die Konffizienten a, b, c, d ... zum Teil imaginär oder komplex, so ändert dies an der Betrachtung nichts. Ist dagegen bei einer Reihe x komplex, so kann man den reellen und den imaginären Teil der Reihe für sich betrachten und für jeden die Konvergenz untersuchen. Statt dessen kann man aber auch untersuchen, für welchen absoluten Betrag von $x + yi$, d. h. für welches $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ die Reihe konvergent ist. Die Grenzwerte von z liegen, geometrisch dargestellt, auf einem um Null geschlagenen Kreise, der als der Konvergenzkreis bezeichnet wird. Genauere Untersuchungen über diese Dinge überschreiten das Ziel der Schule.

IV. Die Newtonsche Reihe und der binomische Lehrsatz für gebrochene und negative Exponenten.

23) Die Newtonsche Reihe und ihre Konvergenz.

In Teil II, Arithmetik Nr. 30, war für ganze, positive Exponenten n bewiesen worden, daß

$$1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots = (1+x)^n$$

ist, wobei die Reihe mit dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliede abbricht.

Bildet man nun für ganz beliebiges p die sogenannte Newtonsche Reihe

$$1 + \frac{p}{1}x + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots,$$

so erstreckt sich diese im allgemeinen ins Unendliche, und es fragt sich, wann sie konvergent und wie groß dann ihre Summe ist.

Der Quotient des $(n+1)^{\text{ten}}$ und n^{ten} Gliedes ist

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}x^n : \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}x^{n-1}$$

oder

$$\frac{(p-n+1)}{n}x = -x + \frac{p+1}{n}x.$$

Für sehr großes n nähert sich dies dem Grenzwerte $-x$. Ist der absolute Betrag desselben angebbar kleiner als 1, so ist nach 18 d) die Reihe konvergent, ist er größer, so ist sie divergent. Der Zwischen-

fall, daß er gleich 1 ist, soll hier nicht untersucht werden. Für uns reicht Folgendes aus:

Die Newtonsche Reihe ist konvergent, sobald der absolute Betrag von x angebbar kleiner als 1 ist.

Um die Reihe zu summieren, muß man zunächst gewisse Eigenschaften ihrer Koeffizienten kennen lernen, wobei man vorläufig zum binomischen Satze für ganze positive Exponenten zurückzukehren hat.

Sind n und ν ganze, positive Zahlen, und bezeichnet man die Binominalkoeffizienten der Reihe nach mit n_1, n_2, n_3, ... bezw. ν_1, ν_2, ν_3, ..., so ist nach dem binomischen Satze

$$(1+x)^n = 1 + n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x^3 + n_4 x^4 + \cdots,$$
$$(1+x)^\nu = 1 + \nu_1 x + \nu_2 x^2 + \nu_3 x^3 + \nu_4 x^4 + \cdots.$$

Durch Multiplikation erhält man daraus eine Formel für

$$(1+x)^n \cdot (1+x)^\nu = (1+x)^{n+\nu},$$

nämlich

$$(1+x)^{n+\nu} = 1 + (n_1 + \nu_1)\, x + (n_2 + n_1\nu_1 + \nu_2)\, x^2 + (n_3 + n_2\nu_1 + n_1\nu_2 + \nu_3)\, x^3 + \cdots,$$

während nach dem binomischen Satze bei entsprechender Bezeichnung der Koeffizienten zugleich ist:

$$(1+x)^{n+\nu} = 1 + (n+\nu)_1\, x + (n+\nu)_2\, x^2 + (n+\nu)_3\, x^3 + \cdots.$$

Die Koeffizienten der entsprechenden Potenzen von x müssen, da es sich nur um eine andere Schreibweise handelt, in beiden Gleichungen übereinstimmen. Schreibt man sie in ihrer eigentlichen Form, so erhält man folgendes System von Gleichungen:

$$\frac{n}{1} + \frac{\nu}{1} = \frac{n+\nu}{1},$$

$$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2} + \frac{n}{1}\cdot\frac{\nu}{1} + \frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2} = \frac{(n+\nu)(n+\nu-1)}{1\cdot 2},$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\nu}{1} + \frac{n}{1}\cdot\frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2} = \frac{(n+\nu)(n+\nu-1)(n+\nu-2)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{\nu}{1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2} + \frac{n}{1}\cdot\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{(n+\nu)(n+\nu-1)(n+\nu-2)(n+\nu-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

u. s. w.

An jeder dieser Gleichungen erkennt man auch durch Auswertung der rechten Seiten, daß sie identische sind.

Daß sie auch für gebrochene und negative n und ν identische sein müssen*), ergiebt sich durch folgende Überlegung. Ist n fest und ν veränderlich, so handelt es sich rechts und links der Reihe nach um Ausdrücke 1., 2., 3., 4., ... Grades in Bezug auf ν. Die Ausdrücke auf der linken Seite mögen daher der Reihe nach mit $f_1(\nu)$, $f_2(\nu)$, $f_3(\nu)$ ..., die auf der rechten mit $\varphi_1(\nu)$, $\varphi_2(\nu)$, $\varphi_3(\nu)$ ... bezeichnet werden. Sie sind der Reihe nach in Bezug auf ν vom 1., 2., 3. Grade, und sind ganze rationale Funktionen von ν, die für alle positiven ganzzahligen Werte nach dem binomischen Satze für ganzzahlige positive Exponenten übereinstimmen. Daher stimmen z. B. $f_p(\nu)$ und $\varphi_p(\nu)$, die vom p^{ten} Grade sind, für mehr als $p+1$ Werte überein, sind also nach Abschnitt 2) vollkommen identisch und stimmen für alle denkbaren Werte von ν, für gebrochene, irrationale und sogar für imaginäre und komplexe überein.

Dies gilt zunächst für jedes feste, ganzzahlige, positive n, also beim Grade p für mehr als $p+1$ solcher Werte; folglich sind sie aus demselben Grunde identisch als ganze rationale Funktionen von n. Damit ist die volle Identität nachgewiesen. Die Gleichungen gelten also, wenn man sie rein mechanisch und ohne jede Beziehung auf den binomischen Lehrsatz bildet, nicht nur für ganze und positive n, sondern auch für gebrochene, negative, sogar auch für irrationale, imaginäre und komplexe n und ν.

24) Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatzes.

Man bilde rein mechanisch für beliebiges n und ν die Newtonschen Reihen

$$1 + n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x^3 + n_4 x^4 + \cdots = B(n),$$
$$1 + \nu_1 x + \nu_2 x^2 + \nu_3 x^3 + \nu_4 x^4 + \cdots = B(\nu),$$

die unter der Voraussetzung $-1 < x < +1$ konvergent sind, so daß ihre unbekannten Summen mit $B(n)$ und $B(\nu)$ bezeichnet werden dürfen.

Durch Multiplikation geht aus konvergenten Reihen wiederum eine konvergente Reihe hervor, deren Summe gleich dem Produkte der ursprünglichen Summen ist. Demnach ist hier

$$1 + (n_1 + \nu_1)\,x + (n_2 + n_1\nu_1 + \nu_2)\,x^2 + (n_3 + n_2\nu_1 + n_1\nu_2 + \nu_3)\,x^3 + \cdots = B(n) \cdot B(\nu).$$

*) Man hat dabei von der binomischen Entstehungsweise ganz abzusehen und die Gleichungen rein mechanisch hinzuschreiben.

Infolge der vorher bewiesenen Identitäten darf man (für beliebiges n und ν) für die linke Seite schreiben:

$$1 + (n+\nu)_1 x + (n+\nu)_2 x^2 + (n+\nu)_3 x^3 + \cdots,$$

was man analog mit $B(n+\nu)$ zu bezeichnen hat. Folglich gilt für die betreffenden unbekannten Summen identisch die Gleichung

1) $$B(n) \cdot B(\nu) = B(n+\nu),$$

in der man ohne weiteres das Additionstheorem der Potenzen gleicher Grundzahl wieder erkennt.

Sind also $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ ganz beliebige Zahlen, die zur mechanischen Bildung der Koeffizienten Newtonscher Reihen benutzt sind, so gilt für den Konvergenzfall $-1 < x < +1$ die Gleichung

2) $$B(\alpha) \cdot B(\beta) \cdot B(\gamma) \cdots = B(\alpha + \beta + \gamma + \cdots).$$

Setzt man hier $\alpha = \beta = \gamma = \cdots$, so folgt für beliebiges α, aber für ganzes positives n, die Formel

3) $$[B(\alpha)]^n = B(n\alpha).$$

Setzt man z. B. $\alpha = \frac{1}{n} \cdot m$, wo m und n ganze, positive Zahlen sind, so wird

$$\left[B\left(\frac{1}{n} \cdot m\right)\right]^n = B\left(n \frac{1}{n} m\right) = B(m).$$

Für ganzes positives m ist aber $B(m) = (1+x)^m$, folglich ist

$$B\left(\frac{m}{n}\right) = [B(m)]^{\frac{1}{n}} = (1+x)^{\frac{m}{n}},$$

d. h.: Die Gleichung

$$1 + \frac{p}{1}x + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots = (1+x)^p$$

gilt bei $-1 < x < +1$ auch für den positiven, gebrochenen Exponenten $p = \frac{m}{n}$.

Setzt man in $B(\alpha) \cdot B(\beta) = B(\alpha + \beta)$ für β den Wert $-\alpha$ ein, so wird

$$B(\alpha) \cdot B(-\alpha) = B(\alpha - \alpha) = B(0) = (1+x)^0 = 1,$$

also ist

$$B(-\alpha) = \frac{1}{B(\alpha)}.$$

Ist nun α eine positive, gebrochene oder ganze Zahl, so ist $B(\alpha) = (1+x)^\alpha$, also

$$B(-\alpha) = \frac{1}{(1+x)^\alpha} = (1+x)^{-\alpha}.$$

Folglich: Die Gleichung

$$1 + \frac{p}{1}x + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots = (1+x)^p$$

gilt bei $-1 < x < +1$ auch für den negativen (ganzen oder gebrochenen) Exponenten $p = -\alpha$.

Bemerkung. Auf den Fall, wo in $(1+x)^p$ der Exponent p irrational oder imaginär ist, braucht die Elementarmathematik nicht einzugehen. Die Potenz bedarf dann einer besonderen Definition, und diese wird durch die entsprechende Newtonsche Reihe gegeben, die dann neuen Untersuchungen zu unterwerfen ist.

25) Binomische Entwickelung irrationaler Ausdrücke. Der binomische Lehrsatz für gebrochene und negative Exponenten gestattet eine derartige Fülle von Anwendungen, daß er als ein Haupthebel der neueren Mathematik bezeichnet werden darf. Zunächst finden die in Teil II über die Exponentialreihe, den Moivreschen Lehrsatz, über die Reihen für Cosinus und Sinus gegebenen Ausführungen ihre Abrundung durch das Aufheben der Beschränkung auf ganze positive n. Andere Anwendungen sind die jetzt folgenden.

Aufgabe. Die Ausdrücke $\sqrt{1+x}$ oder $(1+x)^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{1-x}$ oder $(1-x)^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{1 \pm x}$ oder $(1 \pm x)^{\frac{1}{3}}$, sollen für $-1 < x < +1$ in Reihen entwickelt werden.

Auflösung 1.

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \cdots$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}x - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \tfrac{1\cdot 1}{1\cdot 2}x^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 \cdot \tfrac{1\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 \cdot \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \cdots$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{128}x^4 + \tfrac{7}{1536}x^5 - \cdots.$$

Beispiel.

$$\sqrt{146} = \sqrt{144+2} = \sqrt{144}\sqrt{1+\tfrac{2}{144}} = 12\sqrt{1+\tfrac{1}{72}}$$

$$= 12\left[1 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{72} - \tfrac{1}{8}\tfrac{1}{72^2} + \tfrac{1}{16}\cdot\tfrac{1}{72^3} - \tfrac{5}{128}\cdot\tfrac{1}{72^4} + \cdots\right] = ?$$

Die Reihe konvergiert sehr schnell. Weil die Vorzeichen abwechseln, liegt der wahre Wert stets zwischen zwei aufeinanderfolgenden Summenwerten s_n und s_{n+1}.

Auflösung 2.

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{128}x^4 - \tfrac{7}{1536}x^5 - \cdots.$$

Beispiel.

$$\sqrt{142} = \sqrt{144-2} = 12\sqrt{1-\tfrac{1}{72}}$$
$$= 12\left[1 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{72} - \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{1}{72^2} - \tfrac{1}{16}\cdot\tfrac{1}{72^3} - \tfrac{5}{128}\cdot\tfrac{1}{72^4} - \cdots\right] = ?$$

Auflösung 3.

$$(1+x)^{\frac{1}{3}}$$
$$= 1 + \frac{\frac{1}{3}}{1}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots$$
$$= 1 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3^2}\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2} + \tfrac{2\cdot 5}{3^3}\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \tfrac{2\cdot 5\cdot 8}{3^4}\cdot\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

oder auch

$$= 1 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3\cdot 6}x^2 + \tfrac{2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 - \tfrac{2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 - \tfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12\cdot 15}x^5 + \cdots$$

Ebenso

$$(1-x)^{\frac{1}{3}}$$
$$= 1 - \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3\cdot 6}x^2 - \tfrac{2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 - \tfrac{2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 - \tfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12\cdot 15}x^5 - \cdots$$

Das wirkliche Wurzelausziehen ist also durch diese Reihen wesentlich erleichtert, namentlich in größerer Nähe von Zahlen, aus denen die Wurzel glatt ausgezogen werden kann.

Aufgabe. Bilde mit Hülfe dieser Resultate die Reihen für

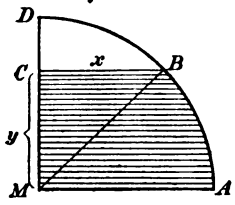
$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x};\ \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x};\ \sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x};$$
$$\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}.$$

Aufgabe. Bilde die Reihen für $\frac{1}{\sqrt{1\pm x}} = (1\pm x)^{-\frac{1}{2}}$ für $\sqrt[3]{1\pm x} = (1\pm x)^{-\frac{1}{3}}$ u. s. w.

Man ist jetzt im Stande, für Kurven von der Gleichung $y = (a+bx)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}x\right)^n$, wo n auch negativ und gebrochen sein darf, die Flächenberechnung $\int_{x_1}^{x_2} F$ und die Bestimmung der Tangentenrichtung für jeden Punkt durchzuführen.

26) Ableitung von Reihen für π, $\arcsin y$ und $\arccos y$ auf geometrischem Wege.

Fig. 139.



a) Figur 139 stellt einen Viertelkreis vom Radius 1 dar. Seine Gleichung ist $x^2 + y^2 = 1^2$, also ist der Querschnitt in Höhe y

$$x = \sqrt{1 - y^2} = (1 - y^2)^{\frac{1}{2}},$$

oder, in binomischer Reihenentwickelung,

$$x = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{1!}y^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}y^4 - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}y^6 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}y^8 - \cdots.$$

Die Fläche $MABC$, d. h. die Fläche bis zur Höhe y, ist also nach der Summenformel

$$1) \quad \overset{y}{\underset{0}{F}} = \frac{y}{1} - \frac{\frac{1}{2}}{1!}\frac{y^3}{3} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\frac{y^5}{5} - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\frac{y^7}{7} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}\frac{y^9}{9} - \cdots.$$

Die Fläche, bis zur Höhe 1 genommen, ist gleich $\frac{\pi}{4}$, also hat man die Reihe

$$2) \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^1\frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1\cdot1}{2!}\cdot\frac{1}{5} - \left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1\cdot3}{3!}\cdot\frac{1}{7} - \left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\frac{1\cdot3\cdot5}{4!}\cdot\frac{1}{9} - \left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{5!}\cdot\frac{1}{11} - \cdots$$

oder auch

$$2^*) \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1\cdot1}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{5} - \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{7} - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{1}{9} - \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}\cdot\frac{1}{11} - \cdots$$

b) Dagegen ist

$$\text{Sektor } MAB = MABC - MBC = \overset{y}{\underset{0}{F}} - y\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left[2\overset{y}{\underset{0}{F}} - y\sqrt{1-y^2}\right],$$

also

$$\text{Sektor } MAB$$

$$= \frac{y}{2}\left[\frac{2}{1} - \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1!}\frac{y^2}{3} + \frac{2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\frac{y^4}{5} - \frac{2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\frac{y^6}{7} + \cdots\right]$$

$$- \frac{y}{2}\left[1 - \frac{\frac{1}{2}}{1!}y^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}y^4 - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}y^6 + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y^1}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{y^5}{5} + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{y^7}{7} + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{y^9}{9} + \cdots\right].$$

Nun ist aber Sektor $MAB = \widehat{AB} \cdot \frac{r}{2} = \frac{1}{2} \arcsin y$. Gleichsetzung giebt

3) $$\arcsin y = \frac{y^1}{1} + \frac{1}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y^7}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\frac{y^9}{9} + \cdots.$$

Schon die Anschauung zeigt, daß y nicht > 1 genommen werden darf.

Ohne besondere Konvergenzuntersuchung leuchtet geometrisch ein, daß für $y = 1$ die Reihe noch konvergiert. Dabei handelt es sich um $\frac{\pi}{2}$, und zwar ist

4) $$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{1}{9} + \cdots.$$

Aus 2*) und 4*) folgt noch durch Subtraktion

5) $$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{1}{11} + \cdots.$$

Nach derselben Figur ist $\arccos y = \frac{\pi}{2} - \arcsin y$, also

6) $$\arccos y = \frac{\pi}{2} - \left[y + \frac{1}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y^7}{7} + \cdots\right].$$

Setzt man für $\frac{\pi}{2}$ seine Reihe ein, so entsteht

7) $$\arccos y = (1-y) + \frac{1}{2}\frac{1-y^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1-y^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1-y^7}{7} + \cdots$$

Die Konvergenzgrenzen sind dieselben wie vorher.

[Nun ist ferner

$$\widehat{AB} = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin y,$$

also

$$\arctan\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = y\cdot\left[1 + \frac{1}{2}\frac{y^2}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^4}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y^6}{7} + \cdots\right].$$

Setzt man also $\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = z$, d. h. $y = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$, so erhält man

$$\arctan z = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{z^2}{3(1+z^2)} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{z^4}{5(1+z^2)^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{z^6}{7(1+z^2)^3} + \cdots\right].$$

An Stelle dieser Reihe, die sich nur unbequem umwandeln läßt, wird jedoch später eine weit einfachere treten. Vorläufig möge sie zeigen, daß auch $\arctan z$ in einer nach ungeraden Potenzen aufsteigende Reihe entwickelt werden kann. Auch die letzte Reihe giebt für $z = 1$ eine brauchbare Entwickelung für $\frac{\pi}{4}$.

Später wird die Reihe für $\arc\sin y$ auf rein arithmetischem Wege entwickelt werden.

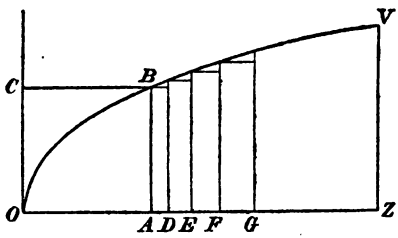
Man merke noch

$$\arc\sin\tfrac{1}{2}=\tfrac{\pi}{6}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{8}\left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}\right)+\tfrac{1}{32}\left(\tfrac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\tfrac{1}{5}\right)+\tfrac{1}{128}\left(\tfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\tfrac{1}{7}\right)+\cdots\Big].$$

V. Anwendung auf algebraische Funktionen.

27) Quadratur der Kurven $y=x^p$ für beliebiges reelles p. Figur 140 stellt ein Quadrat $OABC$ von der Seite 1 und eine Parabel höherer Ordnung von der Gleichung $y=x^p$ dar, wo jedoch p eine gebrochene positive oder negative Zahl sein soll. Die Fläche $AZVB$ soll berechnet werden. OZ soll vorläufig unbestimmt bleiben. Jetzt sei $\frac{m}{n}$ ein beliebiger echter Bruch. Man

Fig. 140.



mache $OD=\left(1+\frac{m}{n}\right)$, $OE=\left(1+\frac{m}{n}\right)^2$, $OF=\left(1+\frac{m}{n}\right)^3$, und fahre so fort bis $OZ=\left(1+\frac{m}{n}\right)^n$, so daß man durch die entsprechenden Ordinaten n Flächenstreifen erhält, die man wie in der Figur als Rechtecke auffasse.

Die Grundlinien der Rechtecke sind der Reihe nach: $\frac{m}{n}$,

$$\left(1+\tfrac{m}{n}\right)^2-\left(1+\tfrac{m}{n}\right)=\left(1+\tfrac{m}{n}\right)\left(1+\tfrac{m}{n}-1\right)=\tfrac{m}{n}\left(1+\tfrac{m}{n}\right),$$

$$\left(1+\tfrac{m}{n}\right)^3-\left(1+\tfrac{m}{n}\right)^2=\left(1+\tfrac{m}{n}\right)^2\left(1+\tfrac{m}{n}-1\right)=\tfrac{m}{n}\left(1+\tfrac{m}{n}\right)^2,$$

und so geht es weiter bis $\frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)^{n-1}$.

Die Höhen sind der Reihe nach

$$1,\ \left(1+\tfrac{m}{n}\right)^p,\ \left[\left(1+\tfrac{m}{n}\right)^2\right]^p=\left(1+\tfrac{m}{n}\right)^{2p},\ \left(1+\tfrac{m}{n}\right)^{3p},\ \cdots,\ \left(1+\tfrac{m}{n}\right)^{(n-1)p}.$$

Das letzte Lot $\left(1+\frac{m}{n}\right)^{np}$ bleibt unbenutzt.

Die Inhaltssumme der Rechtecke ist also

$$\tfrac{m}{n}\left[1+\left(1+\tfrac{m}{n}\right)^{p+1}+\left(1+\tfrac{m}{n}\right)^{2(p+1)}+\cdots+\left(1+\tfrac{m}{n}\right)^{(n-1)(p+1)}\right].$$

Dies ist eine geometrische Reihe von n Gliedern und von der Form

$$\frac{m}{n}[1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}] = \frac{m}{n} \cdot \frac{1 - z^n}{1 - z},$$

so daß die Summe der Rechtecksinhalte wird

$$\frac{m}{n} \frac{1 - \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{n(p+1)}}{1 - \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{p+1}}$$

oder

$$\frac{1 - \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{n(p+1)}}{\frac{n}{m}\left[1 - \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{p+1}\right]}.$$

Der Nenner giebt, nach der binomischen Reihe für gebrochene Exponenten entwickelt,

$$\frac{n}{m}\left[1 - 1 - \frac{p+1}{1}\frac{m}{n} - \frac{(p+1)p}{1 \cdot 2}\frac{m^2}{n^2} - \frac{(p+1)p(p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{m^3}{n^3} - \cdots\right]$$
$$= -\frac{p+1}{1} - \frac{(p+1)p}{1 \cdot 2}\frac{m}{n} - \frac{(p+1)p(p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{m^2}{n^2} - \cdots.$$

Denkt man sich nun m endlich, aber n unendlich groß, so fallen die Glieder dieser ohnehin schnell konvergierenden Reihe fort, und der Nenner reduziert sich auf $-(p+1)$. Zugleich aber geht der Zähler über in $1 - e^{m(p+1)}$, und da zugleich die Treppenräume über den unendlich zahlreich gewordenen Flächenräumen verschwunden sind, so ist die Fläche $AZVB$ geworden:

1) $$F = \frac{1 - e^{m(p+1)}}{-(p+1)} = \frac{e^{m(p+1)} - 1}{p+1}.$$

Nun war $OZ = \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n = e^m$, also die Abscisse $x_1 = e^m$.

Setzt man diesen Wert ein, so ergiebt sich die Fläche

2) $$\overset{x_1}{F}_1 = \frac{{x_1}^{p+1} - 1}{p+1}.$$

Für ein größeres x_2 ist ebenso $\overset{x_2}{F}_1 = \frac{{x_2}^{p+1} - 1}{p+1}$.

Durch Subtraktion erhält man als Fläche über $x_2 - x_1$

3) $$\overset{x_2}{F}_{x_1} = \frac{{x_2}^{p+1} - {x_1}^{p+1}}{p+1}.$$

Dasselbe Resultat erhält man, wenn man von $x = 1$ nach links gehend die innerhalb des Quadrates liegende Diagrammfläche

untersucht. Man hat nur $-\frac{m}{n}$ statt $+\frac{m}{n}$ in die Rechnung einzuführen, so daß es sich um die Abstände

$$1,\ \left(1-\frac{m}{n}\right),\ \left(1-\frac{m}{n}\right)^2,\ \left(1-\frac{m}{n}\right)^3,\ \cdots\ \left(1-\frac{m}{n}\right)^n$$

handelt.

Die Grundlinien der nach links an Breite abnehmenden Rechtecke sind dann

$$-\frac{m}{n},\ -\frac{m}{n}\left(1-\frac{m}{n}\right),\ -\frac{m}{n}\left(1-\frac{m}{n}\right)^2,\ \cdots\ -\frac{m}{n}\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-1}.$$

Die Höhen sind

$$1,\ \left(1-\frac{m}{n}\right)^p,\ \left(1-\frac{m}{n}\right)^{2p},\ \left(1-\frac{m}{n}\right)^{3p},\ \cdots,\ \left(1-\frac{m}{n}\right)^{(n-1)p}.$$

Die Inhaltssumme der Rechtecke wird

$$-\frac{m}{n}\left[1+\left(1-\frac{m}{n}\right)^{p+1}+\left(1-\frac{m}{n}\right)^{2(p+1)}+\cdots+\left(1-\frac{m}{n}\right)^{(n-1)(p+1)}\right]$$

$$=-\frac{m}{n}\,\frac{1-\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n(p+1)}}{1-\left(1-\frac{m}{n}\right)^{p+1}}.$$

Die Wiederholung der früheren Behandlung mit $n=\infty$ giebt

$$F=\frac{1-e^{-m(p+1)}}{-(p+1)}=\frac{e^{-m(p+1)}-1}{-p+1}.$$

Setzt man $OZ_1=\left(1-\frac{m}{n}\right)^n=e^{-m}=x_1$, so erhält man wieder die Formeln 2) und 3).

Mit Ausnahme des Exponenten $p=-1$, der auf die Fläche $\frac{x_2{}^0-x_1{}^0}{0}=\frac{0}{0}$ führt, was unbestimmt ist, sind damit die Diagramme für alle Parabeln höherer Ordnung $y=x^p$ berechnet. Der Fall -1, der auf die gleichseitige Hyperbel $y=x^{-1}=\frac{1}{x}$ führt, ist aber schon vorher besonders behandelt worden.

Dieser Grenzfall scheidet zwei Gruppen von Parabeln höherer Ordnung von einander, für welche einerseits $p>-1$ und $p<-1$ ist.

a) Für $p>-1$ ist die von 1 bis 0 gehende Fläche, da $(p+1)$ positiv ist,

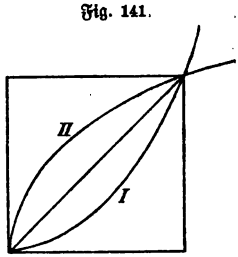
$$\overset{0}{\underset{1}{F}}=\frac{0^{p+1}-1}{p+1}=\frac{-1}{p+1},$$

also in entgegengesetzter Richtung genommen

4) $$\overset{1}{\underset{0}{F}} = \frac{1}{p+1},$$

d. h.: Für $p > -1$ schneidet die Parabel p^{ter} Ordnung den $(p+1)^{ten}$ Theil vom Quadrate ab.

Fig. 141.



Dabei ist die Parabel nach rechts steigend, sobald $p > 0$ ist, dagegen nach rechts sinkend, sobald $-1 < p < 0$ ist. Im letzteren Falle beginnt sie mit der Ordinate ∞, und trotzdem ist die ins Unendliche reichende schraffierte Fläche vom Inhalte $\frac{1}{p+1}$. Die Grenze bildet die gleichseitige Hyperbel. Bei $p > +1$ ist die Parabel von unten gesehen konvex, bei p positiv und < 1 ist sie konkav, bei $p = 1$ fällt sie mit der Diagonale zusammen.

Fig. 142.

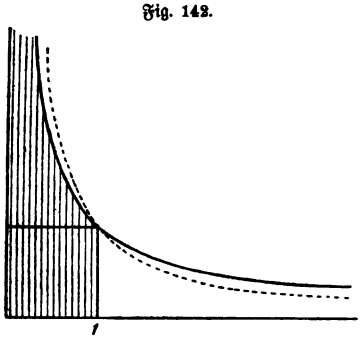
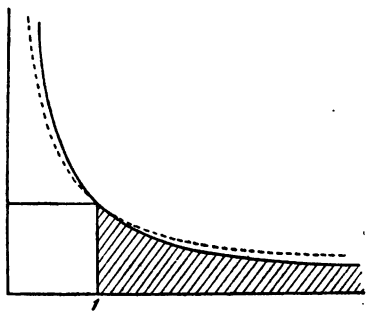


Fig. 143.



Für den gesamten Fall a) ist aber $\overset{\infty}{\underset{1}{F}} = \frac{\infty^{p+1} - 1}{p+1} = \infty$.

b) Für $p < -1$ ist $p+1$ negativ, also

$$0^{p+1} = \frac{1}{0^{-(p+1)}} = \infty; \quad \text{und} \quad \infty^{p+1} = \frac{1}{\infty^{-(p+1)}} = 0.$$

Folglich ist jetzt

$$\overset{0}{\underset{1}{F}} = \frac{0^{p+1} - 1}{p+1} = \frac{\infty - 1}{p+1} = \frac{\infty}{p+1} = -\infty,$$

weil der Nenner negativ ist, also

$$\overset{1}{\underset{0}{F}} = +\infty.$$

Dagegen ist die schraffierte Fläche (Figur 143)

$$\overset{\infty}{F}_{1} = \frac{\infty^{p+1} - 1}{p+1} = \frac{0-1}{p+1} = -\frac{1}{p+1},$$

was ein endlicher positiver Wert ist, und wieder das $\frac{1}{p+1}$-fache vom Quadrate bedeutet.

Für $p < -1$ ist also das von $x = 1$ bis $x = \infty$ gehende Diagramm das $\frac{1}{p+1}$-fache des Quadrates.

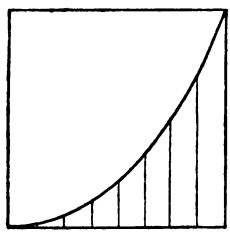
Das Umklappen um die Diagonale verwandelt bei positivem p die Gruppe $p > 1$ in die Gruppe $0 < p < 1$; bei negativem p die Gruppe $p < -1$ in die Gruppe $-1 < p < 0$. Dadurch bestätigen sich die gefundenen Resultate.

An Figur 140 wurde gezeigt, daß, wenn bei Parabeln höherer Ordnung die Abscissen eine geometrische Reihe bilden, die Ordinaten dasselbe thun. Kennt man also die Koordinaten am Anfange und Schlusse des Diagramms, und bildet man für beide Gruppen die mittleren Proportionalen, so geben diese einen neuen Punkt der Kurve. Durch Einschaltung beliebig vieler mittlerer Proportionalen erhält man einen einfachen Konstruktionsmechanismus für beliebig viele Punkte der Diagrammkurve.

28) Anwendung auf die Reihe $\frac{1}{n^{p+1}}\sum n^p$ bei gebrochenem p.

Abgesehen von dem großen geometrischen Fortschritte, auf den die Geometrie noch näher eingehen wird, ergiebt sich für $p > -1$ durch Einteilung der im Quadrate befindlichen Diagrammfläche in unendlich viele Streifen von gleicher Breite, daß die Formel

Fig. 144.



$$\frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$

(für $n = \infty$)

für jedes reelle p gilt, welches größer ist, als -1.

[Daß die Formel für $p < -1$ unbrauchbar ist, ergiebt sich schon daraus, daß dann links Positives, rechts Negatives steht. Dies geht auch daraus hervor, daß für $p < -1$ der Zähler eine endliche Summe giebt, während der Nenner gleich Null wird.]

So ist z. B.

$$\frac{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[3]{n}}{n^{\frac{1}{3}+1}} = \frac{1^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}+\cdots+n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{3}+1}} = \frac{1}{\frac{1}{3}+1} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Dagegen

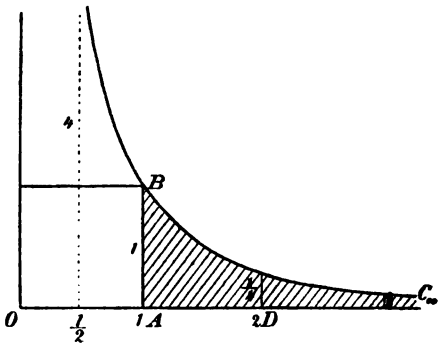
$$\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{n^{-\frac{1}{3}+1}} = \frac{1^{-\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}}+\cdots+n^{-\frac{1}{3}}}{n^{-\frac{1}{3}+1}}$$

$$= \frac{1}{-\frac{1}{3}+1} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.$$

29) Anwendung auf die Gravitation.

Von besonderer Wichtigkeit ist geometrisch der Fall $p = -2$, denn nach Teil II Geom. Nr. 104 ist $y = x^{-2}$ die Gleichung der Gravitationskurve. Das Diagramm ABC_∞ giebt das Potential für den Punkt A an, wenn in O der anziehende Körper steht.

Fig. 145.



Ist O der Erdmittelpunkt, OA der Erdradius, und wiegt ein Körper an der Oberfläche in A 1 kg, wieviel Arbeit ist dann nötig, ihn in die Entfernungen 2, 3, 4, ... ∞ zu bringen?

Auflösung.

$$\overset{2}{F}_{1} = \frac{2^{-1}-1}{-2+1} = \frac{1-\frac{1}{2}}{2-1} = \frac{1}{2}$$

giebt die Hälfte des Quadrates. Letzteres bedeutet die Arbeit, die zur Überwindung eines Widerstandes von 1 kg längs des Weges 860 · 7500 m (Erdradius) nötig ist. Also ist zum Entfernen des Körpers bis zur Stelle D die Arbeit $\frac{1}{2} \cdot 860 \cdot 7500 = 3\,225\,000$ mkg nötig.

Ebenso ist

$$\overset{3}{F}_{1} = \frac{3^{-1}-1}{-2+1} = \frac{\frac{1}{3}-1}{-1} = \frac{2}{3} \text{ des Quadrates.}$$

$$\overset{4}{F}_{1} = \frac{4^{-1}-1}{-2+1} = \frac{\frac{1}{4}-1}{-1} = \frac{3}{4} \text{ des Quadrates.}$$

Dies bedeutet 4 300 000 mkg bezw. 4 837 500 mkg Arbeit.

Endlich ist

$$\overset{\infty}{F}_{1} = \frac{-1}{-2+1} = 1,$$

d. h. gleich der Quadratfläche selbst. Das Fortschaffen des Körpers bis in unendliche Entfernung verlangt also 6 450 000 mkg Arbeit. (Potential der Anziehung zwischen Erd- und Kilogrammasse für die Erdoberfläche.)

Nun hat aber ein mit der Geschwindigkeit v fortgeschleuderter Körper die Arbeitswucht (lebendige Kraft) $m \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{q}{9{,}81} \cdot \frac{v^2}{2}$, wenn q sein Gewicht ist. Setzt man $q = 1$ kg:

$$\frac{1}{9{,}81} \cdot \frac{v^2}{2} = 6\,450\,000,$$

so ergiebt sich

$$v = \sqrt{9{,}81 \cdot 2 \cdot 6\,450\,000} = 11\,249 \text{ m} = \sim 1\tfrac{1}{2} \text{ Meile}$$

als die Abschußgeschwindigkeit, die nötig sein würde, um zu erzwingen, daß das Geschoß bis in unendliche Entfernung geht und nie zur Erde zurückkehrt. Umgekehrt ist es die Geschwindigkeit, mit der ein aus sehr großer Entfernung auf die Erde fallender Meteorstein die Erde treffen würde, wenn seine Anfangsgeschwindigkeit Null war. Division durch 425 würde die Anzahl von Calorien geben, die dabei höchstens entwickelt werden können, nämlich 15 177. Ähnliche Aufgaben lassen sich für den Sonnenkörper lösen*).

Durch die Betrachtung der Kurven $y = x^{-2}$ wird also der Einblick in kosmologische und astronomische Verhältnisse gewonnen, der zum Verständnis wichtiger Forschungsresultate der neueren Zeit führt.

---

*) Endgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gr} = 86{,}41$ Meilen; Anzahl der Calorien für jedes kg fallender Masse 49 412 000. Ist also die Sonne durch allmählichen Zusammensturz kosmischer Massen entstanden, so erscheint ihr hoher Wärmegrad trotz der Ausstrahlung als etwas ganz Natürliches.

30) Anwendung auf adiabatische Expansions- und Kompressions-Diagramme.

Eine der wichtigsten Parabeln höherer Ordnung ist die adiabatische*) Expansionskurve, d. h. die Diagrammkurve für die Expansionsarbeit abgesperrter Gase unter der Bedingung, daß Wärme weder durch die Cylinderwände hindurch verloren geht, noch künstlich von außen hereingebracht wird. Der Dampf arbeitet also unter Arbeitsleistung und kühlt sich dabei ab, weil auf je 425 mkg geleisteter Arbeit eine Calorie verloren geht. Die Spannung nimmt also schneller ab als bei Zugrundelegung des Mariotteschen Gesetzes (konstante Temperatur).

Es handelt sich bei dem adiabatischen Zustande um das Poissonsche oder potenzierte Mariottesche Gesetz $\frac{p}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^m$, wo m für atmosphärische Luft den Wert 1,41, für gesättigte Dämpfe durchschnittlich 1,125 $= \frac{9}{8}$ hat. Die Spannungen verhalten sich also umgekehrt wie die entsprechend potenzierten Volumina. Das physikalische Gesetz läßt sich elementar nachweisen.

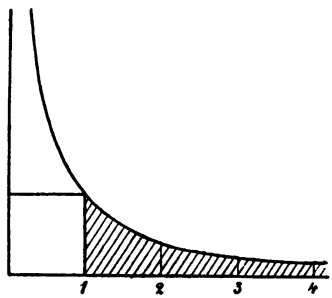
Die adiabatische Kurve hat also eine Gleichung von der Form

$$\frac{y}{y_1} = \left(\frac{x_1}{x}\right)^{1,41}, \quad \text{oder} \quad y = (y_1 x_1^{1,41}) x^{-1,41}.$$

(Statt 1,41 gegebenfalls 1,125 gesetzt.)

Aufgabe. Die Kurve $y = x^{-1,41}$ hat an den Stellen $x = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ welche Ordinaten? Von 1 ab gerechnet ist das Diagramm bis 2, 3, 4, ... wie groß?

Fig. 146.



Auflösung. $y = \infty$, 1, 0,3761, 0,21245, 0,14161.

$$\overset{\infty}{F}_1 = -\frac{1}{1+p} = -\frac{1}{-1,41+1} = \frac{1}{0,41} = 2,439,$$

$$\overset{\infty}{F}_2 = -\frac{2^{-1,41+1}}{-1,41+1} = \frac{1}{0,41 \cdot 2^{0,41}} = 1,8362,$$

$$\overset{2}{F}_1 = 2,439 - 1,8362 = 0,603.$$

Entsprechend sind die anderen Fragen zu lösen.

*) $\dot{\alpha}$ = nicht, $\delta\iota\dot{\alpha}$ = durch, $\beta\alpha\acute{\iota}\nu\omega$ = gehen. Es handelt sich um „Nichtdurchgang" von Wärme durch die Cylinderwände.

Aufgabe. Wie groß ist das Diagramm der Adiabate von x_1 bis x_2?

Auflösung.

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = (y_1 x_1^{1,41}) \frac{x_2^{-1,41+1} - x_1^{-1,41+1}}{-1,41+1} = x_1^{1,41} y_1 \frac{x_1^{-0,41} - x_2^{-0,41}}{0,41}$$

$$= x_1^{1,41-0,41} \cdot y_1 \frac{1 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{-0,41}}{0,41}$$

oder endlich

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \frac{x_1 y_1}{0,41}\left[1 - \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{0,41}\right].$$

Beispiele.

Aufgabe. Ein Kilogramm atmosphärischer Luft von einer Atmosphäre Spannung und von Null Grad Celsius dehne sich adiabatisch unter voller Arbeitsleistung auf das doppelte, dreifache, vierfache, unendlichfache des Volumens aus. Wieviel Arbeit wird dabei geleistet?

Auflösung. Ein Kilogramm Luft von solchem Zustande nimmt den Raum 0,773 cbm ein und giebt auf 1 qm Druckfläche 10 334 kg Druck. Denkt man sich die Kolbenfläche des Cylinders als 1 qm, also den Anfangsdruck y_1 als 10 334 kg, und die Entfernung x_1 des Kolbens vom Cylinderboden als 0,773 m, so hat man bei Ausdehnung auf das doppelte Volumen ($x_2 = 2 \cdot 0773$):

$$\text{Arbeit} = \frac{x_1 y_1}{0,41}\left[1 - \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{0,41}\right] = \frac{0,773 \cdot 10334}{0,41}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{0,41}\right] = 4819,7 \text{ mkg}.$$

Ferner bei Ausdehnung auf das dreifache Volumen:

$$\overset{3}{\underset{1}{A}} = \frac{0,773 \cdot 10334}{0,41}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{0,41}\right] = 7065,8 \text{ mkg};$$

ebenso

$$\overset{4}{\underset{1}{A}} = \frac{0,773 \cdot 10334}{0,41}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{0,41}\right] = 8447,1 \text{ mkg};$$

$$\overset{\infty}{\underset{1}{A}} = \frac{0,773 \cdot 10334}{0,41}\left[1 - \left(\frac{1}{\infty}\right)^{0,41}\right] = \frac{0,773 \cdot 10334}{0,41} = 19\,484 \text{ mkg}.$$

Bemerkungen. Die Schlußspannungen sind nach der Formel $\frac{p}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{1,41}$ der Reihe nach $p_2 = 0,3761$ Atm., $p_3 = 0,21245$ Atm., $p_4 = 0,14161$ Atm., $p_\infty = 0$ Atm. Die Physik lehrt, daß auf je 425 mkg geleisteter Arbeit 1 Calorie verloren geht, und daß die Luft die Kapazität $C_v = 0,16851$ hat, d. h. daß 0,16851 Calorie

nötig sind, um 1 kg Luft um 1^0 zu erwärmen. Bei der Ausdehnung auf das ∞-fache Volumen gehen also $\frac{19\,484}{425}$ Calorien verloren und die Temperaturerniedrigung beträgt $\frac{19\,484}{425 \cdot 0{,}16851}$ Grad Celsius, d. h. die Luft kommt auf den absoluten Nullpunkt, etwa -273^0 C. In ähnlicher Weise sind die Schlußtemperaturen bei den übrigen Fällen zu berechnen. So erkennt man z. B., daß Luft, die ein Gebirge übersteigt, infolge der beim Steigen stattfindenden Ausdehnung und der aus letzterer folgenden Arbeitsleistung sich ganz erheblich abkühlt.

Setzt man in die Arbeitsformel statt des Exponenten 0,41 den Exponenten $1{,}125 - 1 = 0{,}125 = \frac{1}{8}$ ein, so erhält man die Arbeitsleistung des Wasserdampfes in der Dampfmaschine. Schlußspannung und Schlußtemperatur ergeben sich ebenfalls (letztere mit Hülfe des entsprechenden C_v), allerdings unter der Voraussetzung, daß keine Kondensation stattfindet.

Aufgabe. Ein Kilogramm Luft von 0^0 C. und 1 Atm. Spannung werde auf $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ des Volumens zusammengepreßt. Wieviel Arbeit ist nötig, wie groß ist die Schlußtemperatur und wie groß die Schlußspannung?

Auflösung. In der Arbeitsformel sind nur die Zeichen zu wechseln, da es sich um negative gewonnene Arbeit handelt. Also:

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{A}} = \frac{x_1 y_1}{0{,}41}\left[\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{0{,}41} - 1\right].$$

Folglich erhält man in den genannten Fällen als Arbeit:

$$\overset{\frac{1}{2}v}{\underset{v}{A}} = \frac{0{,}773 \cdot 10\,334}{0{,}41}\left[2^{0{,}41} - 1\right] = 6404{,}3 \text{ mkg},$$

$$\overset{\frac{1}{3}v}{\underset{v}{A}} = \frac{0{,}773 \cdot 10\,334}{0{,}41}\left[3^{0{,}41} - 1\right] = 11\,086 \text{ mkg}$$

$$\overset{\frac{1}{4}v}{\underset{v}{A}} = 14\,913 \text{ mkg}.$$

Die Schlußspannungen ergeben sich als 2,6574, 4,7070, 7,0615 Atm.

Die Schlußtemperaturen als $89^0{,}423$ C., $154^0{,}80$ C., $208^0{,}5$ C.

Bei Dampfmaschinen, Heißluft- und Druckluftmaschinen handelt es sich wiederum um die Volldruckarbeit V, die Expansionsarbeit $\frac{V}{0{,}41}\left[1-\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{m-1}\right]$ und um die Gegenarbeit G der Atmosphäre oder des Kondensators. Die Anzahl der Pferdestärken erhält man wieder durch Multiplikation mit $\frac{2n}{60\cdot 75}=\frac{n}{2250}$. (Vergl. Seite 139 bis 141.)

Beispiel. Eine doppeltwirkende Druckluftmaschine arbeite mit 5 Atm. Anfangsdruck. Der Kolben habe 0,4 m Durchmesser und 0,8 m Hub. Die Tourenzahl sei 100. (Der Widerstand von 1 Atm. ist zu überwinden.) Wieviel leistet sie bei verschiedenen Füllungsgraden?

Auflösung.

Bei ganzer Füllung (Volldruckarbeit) 184 Pferdestärken.
" $\frac{1}{2}$ " 138,91 "
" $\frac{1}{3}$ " 98,84 "
" $\frac{1}{4}$ " 72,57 "

Dieselbe Aufgabe für Dämpfe $\left(m=1{,}125=\frac{9}{8}\right)$ bei Auspuffmaschinen.

Auflösung. Volldruck wie vorher. $\frac{1}{2}$ Füllung 145,9 Pferdestärken. $\frac{1}{3}$ Füllung 109,78 Pferdestärken. $\frac{1}{4}$ Füllung 85,01 Pferdestärken.

Dieselbe Aufgabe für Dampfmaschine mit Kondensator von $\frac{1}{12}$ Atmosphäre mittlerem Gegendruck.

Auflösung. Volldruck: 227,02 Pferdestärken.
$\frac{1}{2}$ Füllung 188,24 Pferdestärken. $\frac{1}{3}$ Füllung 152,11 Pferdestärken. $\frac{1}{4}$ Füllung 127,33 Pferdestärken.

Aufgabe. Bei einer Gebläsemaschine soll Luft auf 1,2 Atmosphären zusammengepreßt und dann in die Kanäle getrieben werden. Die Kolbenfläche sei 1 qm, der Gesamthub 1 m, die Tourenzahl 60. Wie viele Pferdestärken sind theoretisch nötig?

Auflösung. 25,8 Pferdestärken.

31) Bemerkungen über algebraische Funktionen.

Handelt es sich jetzt um Funktionen, die folgendem Beispiele entsprechen,

$$y=\cdots+d_1x^{-\frac{9}{8}}+c_1x^{-1}+b_1x^{-\frac{5}{6}}+a+bx^{\frac{1}{2}}+cx^{\frac{2}{3}}+dx^4+\cdots,$$

so ist für diese $\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}}$ leicht zu bilden, nämlich für das Beispiel

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = -\cdots + \frac{d_1}{-\frac{9}{8}+1}\left(x_2^{-\frac{9}{8}+1} - x_1^{-\frac{9}{8}+1}\right) + c_1\,({}^e\lg x_2 - {}^e\lg x_1)$$

$$+ \frac{b_1}{-\frac{5}{6}+1}\left(x_2^{-\frac{5}{6}+1} - x_1^{-\frac{5}{6}+1}\right) + \frac{c}{\frac{2}{3}+1}\left(x_2^{\frac{2}{3}+1} - x_1^{\frac{2}{3}+1}\right) + \cdots,$$

nur darf in diesem Falle die Stelle $x = 0$ nicht im Diagramme liegen, weil dort die beiden ersten Posten unendlich Großes geben. Dagegen würde bei dem 3. Posten diese Vorsicht nicht nötig sein, weil $-\frac{5}{6} > -1$ ist. Es giebt also **bedenkliche** und **nichtbedenkliche** Unendlichkeitsstellen. Die einen sind aus dem Diagramm auszuschließen, die anderen können mit eingerechnet werden. In allen Fällen aber ist es gut, die einzelnen Quadranten für sich zu berechnen, wenn die Gesamtfläche in sämtliche hineinragt.

Auch Funktionen von der Form

$$y = (a - x)^{p_1} + (b - 2x)^{p_2} + \left(a - \frac{3}{x}\right)^{p_3} + \cdots,$$

wo die p beliebige reelle Zahlen bedeuten, kann man jetzt behandeln, nur sind die Unendlichkeitsstellen darauf hin zu untersuchen, ob man sie einrechnen darf, oder nicht. In dem einen Falle dürfen sie im Diagramme liegen, im anderen nicht.

Damit hat die Lehre von den **algebraischen** Funktionen, d. h. denjenigen Funktionen, bei denen mit x nur **algebraische** Operationen vorgenommen werden, einen vorläufigen **elementaren** Abschluß erlangt. Unter algebraischen Operationen werden dabei nur Addition, Multiplikation, Potenzierung und Radicierung verstanden, wobei die Anzahl der Operationen eine endliche sein soll. Die Frage, ob Ausdrücke wie $x^{\sqrt{2}}$ (wo also der Exponent irrational und der Ausdruck wegen des unendlich großen Nenners des Exponenten unendlich vieldeutig ist) als algebraisch oder transcendent aufzufassen sind, soll hier nicht entschieden werden. Dagegen werden Ausdrücke, wie a^x als **transcendente** Funktionen bezeichnet. Ihre Untersuchung beruht im Wesentlichen darauf, sie wie e^x in unendlichen Reihen zu entwickeln, die nur ganze Potenzen von x enthalten, wie z. B.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots.$$

Wie also endlose Dezimalbrüche sowohl rational, als auch irrational und transcendent sein können, so sind auch **unendliche Summen**

rationaler Funktionen entweder rational, wie die geometrische Reihe, oder irrational, wie gewisse binomische Reihen, oder transcendent, wie die Exponentialreihe. Die Analogie ist eine vollständige, ihre Untersuchung aber übersteigt das Ziel der Schule.

VI. Reihenentwickelungen für einige transcendente Funktionen.

32) Logarithmus.*)

Ist $z = {}^{a}\lg y$, so folgt $e^z = y$, oder da (für $n = \infty$) $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$ ist, $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = y$. In Folgendem soll n stets als unendlich groß gedacht werden.

Aus der letzten Gleichung folgt

$$z = \frac{y^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}},$$

also ist

$${}^{a}\lg y = \frac{y^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}.$$

Man setze nun $y = 1 + x$, dann ist

$${}^{a}\lg (1 + x) = \frac{(1 + x)^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}.$$

Ist also $-1 < x < +1$, so darf man nach der binomischen Reihe entwickeln, und erhält, wenn man die unendlich kleine Größe $\frac{1}{n} = \delta$ setzt:

$${}^{a}\lg (1 + x) = \frac{(1 + x)^{\delta} - 1}{\delta}$$

$$= \frac{1}{\delta}\left[\left(1^{\delta} + \frac{\delta}{1}x + \frac{\delta(\delta-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\delta(\delta-1)(\delta-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots\right) - 1\right],$$

oder

$${}^{a}\lg (1 + x) = x + \frac{\delta - 1}{1\cdot 2}x^2 + \frac{(\delta-1)(\delta-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{(\delta-1)(\delta-2)(\delta-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \cdots.$$

*) Fortsetzung von Teil II, Arithmetik, Abschnitt VI (Nr. 52).

Läßt man δ unendlich klein werden, so hat man für die Grenze $\delta = 0$ und für $-1 < x < 1$:

$$1) \qquad {}^{e}\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

Setzt man $(-x)$ für x ein, so folgt

$$2) \qquad {}^{e}\lg(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots.$$

Durch Subtraktion erhält man die Reihe für ${}^{e}\lg(1+x) - {}^{e}\lg(1-x)$ oder

$$3) \qquad {}^{e}\lg\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right]$$
$$\text{für } -1 < x < 1.$$

Setzt man $\frac{1+x}{1-x} = a$, so ist $x = \frac{a-1}{a+1}$ zu setzen, was für jedes positive a absolut genommen kleiner als 1 ist. So folgt

$$4) \qquad {}^{e}\lg a = 2\left[\frac{a-1}{a+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^5 + \cdots\right]$$
$$\text{für jedes positive } a.$$

Setzt man hier $a = 1 + z$, so wird $\frac{a-1}{a+1} = \frac{z}{2+z}$, und es gilt für $-1 < z < \infty$ die Reihe

$$5) \quad {}^{e}\lg(1+z) = 2\left[\frac{z}{2+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2+z}\right)^5 + \cdots\right],$$

die für kleine z sehr schnell konvergiert.

Hier setze man $z = \frac{y}{x}$, also $1 + z = 1 + \frac{y}{x} = \frac{x+y}{x}$, folglich $\lg(1+z) = \lg\frac{x+y}{x} = \lg(x+y) - \lg x$. Dabei wird ferner $\frac{z}{2+z} = \frac{\frac{y}{x}}{2+\frac{y}{x}} = \frac{y}{2x+y}$. Setzt man alles in 5) ein und bringt man $-\lg x$ nach rechts, so ergiebt sich

$$6) \quad \lg(x+y) = \lg x + 2\left[\frac{y}{2x+y} + \frac{1}{3}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^5 + \cdots\right]$$
$$\text{für } \frac{y}{x} > -1.$$

Mit Hülfe dieser Reihen ist man im Stande, die natürlichen Logarithmen gegebener Zahlen sehr schnell zu berechnen, wobei man, um schnelle Konvergenz zu erreichen, gewisse Kunstgriffe anzuwenden hat.

Um z. B. $^e\lg 2$ zu berechnen, kann man $\lg\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\right) = \lg\frac{3}{2} + \lg\frac{4}{3}$ zu Grunde legen, Logarithmen, die man erhält, wenn man in Gleichung 3) $x = \frac{1}{5}$ bezw. $x = \frac{1}{7}$ einsetzt. Dies giebt die schnell konvergierenden Reihen

$$^e\lg\tfrac{3}{2} = 2\left[\tfrac{1}{1\cdot 5} + \tfrac{1}{3\cdot 5^3} + \tfrac{1}{5\cdot 5^5} + \tfrac{1}{7\cdot 5^7} + \tfrac{1}{9\cdot 5^9} + \cdots\right]$$
$$= 0{,}405\ 465\ 108\ 108\ 164\ldots,$$
$$^e\lg\tfrac{4}{3} = 2\left[\tfrac{1}{1\cdot 7} + \tfrac{1}{3\cdot 7^3} + \tfrac{1}{5\cdot 7^5} + \tfrac{1}{7\cdot 7^7} + \tfrac{1}{9\cdot 7^9} + \cdots\right]$$
$$= 0{,}287\ 682\ 072\ 451\ 781.$$

Die Summe giebt $^e\lg 2 = 0{,}693\ 147\ 180\ 559\ 945\ldots$

Um auf $^e\lg 10$ zu gelangen, benutze man Gleichung 3) für $x = \frac{1}{9}$. Dies giebt

$$^e\lg\tfrac{5}{4} = 2\left[\tfrac{1}{1\cdot 9} + \tfrac{1}{3\cdot 9^3} + \tfrac{1}{5\cdot 9^5} + \tfrac{1}{7\cdot 9^7} + \cdots\right]$$
$$= 0{,}223\ 143\ 551\ 314\ 210\ldots.$$

Nun ist $10 = \frac{5}{4}\cdot 2^3$, also $^e\lg 10 = {}^e\lg\frac{5}{4}\, e + 3\lg 2$. Man erhält

$$^e\lg 10 = 2{,}302\ 585\ 092\ 994\ 045\ldots$$

Hieraus ergiebt sich als Modul der Briggschen Logarithmen

$$m = \frac{1}{^e\lg 10} = 0{,}434\ 294\ 481\ 903\ 251\ldots$$

Reihe 3) ist also sehr brauchbar zur Berechnung der Logarithmen von Brüchen, die nahe bei 1 liegen.

Behufs der Entwickelung von a^x setze man $a = e^\alpha$, also $\alpha = {}^e\lg a$. Dann ist

$$a^x = (e^\alpha)^x = e^{\alpha x} = e^{x\lg a} = 1 + \frac{x\lg a}{1!} + \frac{(x\lg a)^2}{2!} + \frac{(x\lg a)^3}{3!} + \cdots$$

32) Reihen für π und cyklometrische Funktionen.

In Teil II war bewiesen

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i}\lg\frac{1+i}{1-i}.$$

Man wende hierauf die Reihe 3) an, dann wird

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i}\,2\left[i + \frac{i^3}{3} + \frac{i^5}{5} + \frac{i^7}{7} + \cdots\right],$$

oder

$$7)\qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \cdots,$$

die wegen der wechselnden Zeichen noch konvergent ist*). Die Konvergenz ist aber so schwach, daß mehrere Millionen Glieder berechnet werden müßten, wenn man π bis auf 7 Dezimalstellen genau berechnen wollte.

Dies ist die Leibnitzsche Reihe für $\frac{\pi}{4}$.

Die früher gefundenen Reihen für $\frac{\pi}{4}$ bezw. $\frac{\pi}{2}$ waren brauchbarer. Noch bessere werden später gegeben.

Die hier zu Grunde gelegte Formel war nach Teil II ein besonderer Fall der folgenden:

$$e^{2iz} = \frac{1 + i\tan z}{1 - i\tan z}.$$

Aus ihr folgt nach 3)

$$8)\quad z = \frac{1}{2i}\lg\frac{1 + i\tan z}{1 - i\tan z} = \tan z - \frac{\tan^3 z}{3} + \frac{\tan^5 z}{5} - \frac{\tan^7 z}{7} + \cdots,$$

wo jedoch $-1 < \tan z < +1$ sein muß, d. h. $-45^0 < \alpha < 45^0$.

Setzt man hier $\tan z = x$, also $z = \operatorname{arc}\tan x$, so folgt

$$9)\qquad \operatorname{arc}\tan x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots,$$

was für $-1 < x < +1$ konvergiert. Für den Grenzfall $x = +1$ erhält man wieder die Reihe 7).

In Gleichung 8) war z in einer nach Potenzen von $\tan z$ fortschreitenden Reihe entwickelt. Da $\tan z$ eine ungerade Funktion von z ist, so konnten nur ungerade Potenzen vorkommen, denn für gerade Potenzen würde die Vertauschung von $+z$ und $-z$ gleichgültig sein, die für die linke Seite nicht gleichgültig ist.

Da nun $\sin x$ ebenfalls eine ungerade Funktion von x ist, so läßt sich vermuten, daß x in einer Reihe entwickelt werden kann, die nach ungeraden Potenzen von $\sin x$ fortschreitet. Danach würde sein:

$$a)\qquad x = a\sin x + b\sin^3 x + c\sin^5 x + d\sin^7 x + \cdots,$$

wo die Koeffizienten unbestimmt sind, und ebenso

$$y = a\sin y + b\sin^3 y + c\sin^5 y + d\sin^7 y + \cdots,$$

folglich

$$x - y = a(\sin x - \sin y) + b(\sin^3 x - \sin^3 y) + c(\sin^5 x - \sin^5 y) + \cdots,$$

also auch

$$b)\quad \frac{x - y}{\sin x - \sin y} = a + b\frac{\sin^3 x - \sin^3 y}{\sin x - \sin y} + c\frac{\sin^5 x - \sin^5 y}{\sin x - \sin y} + \cdots.$$

*) Die Untersuchung, ob die Konvergenz bedingt oder unbedingt ist, soll hier unterbleiben.

Auf der linken Seite ist

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2},$$

also für den Fall, daß y nahe an x und $(x-y)$ sehr klein, also auch $\sin \frac{x-y}{2}$ sehr nahe an $\frac{x-y}{2}$ ist:

$$\frac{x-y}{\sin x - \sin y} = \frac{x-y}{(x-y)\cos \frac{2x}{2}} = \frac{1}{\cos x}.$$

Rechts dagegen ist jedes

$$\frac{\sin^n x - \sin^n y}{\sin x - \sin y} = \sin^{n-1} x + \sin^{n-2} x \sin y + \sin^{n-3} x \sin^2 y + \cdots + \sin x \sin^{n-2} y + \sin^{n-1} y,$$

also steht, wenn y sehr nahe an x liegt, rechts $n \sin^{n-1} x$ für jedes n. Demnach geht b) über in

$$\frac{1}{\cos x} = a + 3b \sin^2 x + 5c \sin^4 x + 7d \sin^6 x + \cdots.$$

Nun ist aber zugleich

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = (1 - \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2} \sin^2 x + \tfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \sin^4 x + \tfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \sin^6 x + \cdots,$$

folglich muß sein

$$a = 1, \quad 3b = \tfrac{1}{2}, \quad 5c = \tfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \quad 7d = \tfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \quad \text{u. s. w.}$$

Damit sind die Koeffizienten bestimmt, und Gleichung a) geht über in

10) $$x = \sin x + \tfrac{1}{2} \frac{\sin^3 x}{3} + \tfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\sin^5 x}{5} + \tfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\sin^7 x}{7} + \cdots.$$

Demnach ist, wie schon früher geometrisch gefunden war*),

11) $$\arc \sin x = x + \tfrac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \tfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \tfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \tfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{x^9}{9} \cdots,$$

woraus für $x = 1$ die schon gefundene Reihe für $\frac{\pi}{2}$ und für $\arc \cos x$ nachstehende ebenfalls schon besprochene Reihe folgt:

12) $$\arc \cos x = \frac{\pi}{2} - \left[x + \tfrac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \tfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \cdots\right].$$

*) Die Übereinstimmung mit dem früheren Resultate möge hinreichen, gewissen Zweifeln bezüglich der Strenge der Beweisführung, die hier erhoben werden könnten, vorläufig zu begegnen.

[34) Die Reihen für $\tan x$ und $\cot x$.

Der Vollständigkeit halber könnte noch auf die Reihen für $\tan x$ und $\cot x$ eingegangen werden.

Nach dem Früheren ist z. B.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots}.$$

Da man im Konvergenzfalle die Division mechanisch ausführen darf, so erhält man

$$\tan x = x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{16x^5}{5!} + \frac{272x^7}{7!} + \cdots$$
$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{215} + \cdots.$$

Da jedoch die Division bald unbequem wird, soll auf diese weniger übersichtliche Reihe nicht weiter eingegangen werden. Mit Hülfe der Bernoullischen Zahlen ist es gelungen, eine übersichtlichere Form zu gewinnen. Dies geht aber für die Schule zu weit, ebenso, wie die Untersuchung des Konvergenzgebietes.]

35) Quadratur und Tangentenproblem für die behandelten transcendenten Funktionen.

Nachdem die betreffenden Funktionen nach aufsteigenden Potenzen von x in Reihen entwickelt sind, gelten von ihnen die Flächen- und Tangentensätze, die für ganze rationale Funktionen gelten.

So ist z. B. für $y = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$, also für die logarithmische Kurve,

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{x_1}{1} + \frac{x_1^2}{2!} + \frac{x_1^3}{3!} + \frac{x_1^4}{4!} + \cdots = e^{x_1} - 1,$$

folglich

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = e^{x_2} - e^{x_1}.$$

Die Fläche von $-\infty$ bis 0 ist also gleich 1, dagegen $\overset{x}{\underset{-\infty}{F}} = e^x$.

Ferner ist an jeder Stelle x die Tangentenrichtung zu bestimmen aus

$$\tan \alpha = 1 + \frac{2x}{1 \cdot 2} + \frac{3x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{4x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$
$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x.$$

Aus $\tan \alpha = \frac{e^x}{1}$ folgt, daß die Projektion der Tangente auf die X-Achse, die sog. Subtangente, an jeder Stelle gleich 1 ist.

Für $y = \sin x$, die besonders wichtige Sinus-Kurve, ist

$$\int_0^{x_1} F = \frac{x_1^2}{1|2} - \frac{x_1^4}{3|4} + \frac{x_1^6}{5|6} - \cdots = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \cdots = 1 - \cos x_1,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} F = (1 - \cos x_2) - (1 - \cos x_1) = \cos x_1 - \cos x_2.$$

Die Tangentenrichtung an jeder Stelle bestimmt sich aus

$$\tan\alpha = \frac{1x^0}{1!} - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \cos x.$$

Entsprechend ist es mit den übrigen in Reihen entwickelten Funktionen.

Nur liegen bisweilen die geschlossenen Ausdrücke etwas versteckt. So ist z. B. für $y = \operatorname{arc}\sin x$

$$\begin{aligned}
\int_0^x F &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2\cdot 3}\frac{x^4}{4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\frac{x^6}{6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\frac{x^8}{8} + \cdots \\
&= \left[\frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^6}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{y^8}{7} + \cdots\right] \\
&\qquad - \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^6}{6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^8}{8} + \cdots\right] \\
&= x\cdot\operatorname{arc}\sin x - 1 + \left[1 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^6}{6} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^8}{8} - \cdots\right] \\
&= x\cdot\operatorname{arc}\sin x - 1 + \sqrt{1 - x^2}.
\end{aligned}$$

Also

$$\int_0^{x_1} F = x_1\operatorname{arc}\sin x_1 + \sqrt{1 - x_1^2} - 1$$

und

$$\int_{x_1}^{x_2} F = (x_2\operatorname{arc}\sin x_2 - x_1\operatorname{arc}\sin x_1) + (\sqrt{1 - x_2^2} - \sqrt{1 - x_1^2}).$$

Die Tangentenrichtung bestimmt sich aus

$$\begin{aligned}
\tan\alpha &= 1 + \frac{1}{2}\frac{3x^2}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{5x^4}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{7x^6}{7} + \cdots \\
&= 1 + \frac{1x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^8 + \cdots,
\end{aligned}$$

oder

$$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Aus den früher besprochenen Anwendungen der algebraischen Analysis ergiebt sich, welcher außerordentliche Fortschritt für die analytische

Geometrie und Flächenberechnung, für die Körperberechnungen und für die Mechanik mit diesen Reihenentwickelungen gewonnen ist.

Die überall vermerkten Einschränkungen aber deuten schon hinreichend an, daß damit erst die Vorhöfe einer höheren Wissenschaft betreten sind, in der die Theorie des Unendlichkleinen zum eigentlichen Austrage kommt und der Funktionsbegriff in seiner ganzen Tragweite sichtbar wird. Dies ist die Differential- und Integralrechnung, die Hand in Hand mit der allgemeinen Funktionentheorie ganz neue Bereiche des mathematischen Denkens erschlossen hat, die aber der Hochschule vorbehalten werden müssen.

36) Nachträge über die Berechnung der Zahl π.

Die Wichtigkeit der Zahl π für die niedere und höhere Mathematik hat es wünschenswert erscheinen lassen, schnell konvergierende Reihen für ihre Berechnung zu finden. Die Leibnitzsche Reihe war ganz unbrauchbar.

Durch Einsetzung von $x = \frac{\pi}{6}$ in die Reihe für $\operatorname{arc\,tan} x$ fand man, da $\tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist,

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3(\sqrt{3})^3} + \frac{1}{5(\sqrt{3})^5} + \frac{1}{7(\sqrt{3})^7} + \cdots,$$

also

$$\pi = 2\sqrt{3}\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{3\cdot 3^1} + \frac{1}{3\cdot 5^2} + \frac{1}{3\cdot 7^3} + \cdots\right],$$

womit es unter großem Zeitaufwand gelang, π auf etwa 100 Stellen genau zu berechnen. Besser ist schon die Eulersche Reihenentwickelung mit Hülfe der Formel

$$4) \qquad \begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \operatorname{arc\,tan}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tan}\frac{1}{3} \\ &= \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \cdots\right] \\ &\quad + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \cdots\right]. \end{aligned}$$

Die Formel 4) ist folgendermaßen entstanden. Euler wollte statt $\tan\alpha = \tan\frac{\pi}{4} = 1$ einen kleineren Wert haben, setzte daher in $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$ willkürlich $\tan\alpha = \frac{1}{2}$, woraus sich $\tan\beta = \frac{1}{3}$ ergiebt.

Auf demselben Grundgedanken fußend kann man noch weit schneller konvergierende Reihen finden. So ist z. B. folgender Gang eingeschlagen worden.

In $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta} = 1$ setzt man willkürlich $\tan\alpha = \frac{1}{5}$, so daß sich ergiebt $\tan\beta = \frac{2}{3}$, also

a) $$\text{arc tan } 1 = \text{arc tan } \tfrac{1}{5} + \text{arc tan } \tfrac{2}{3}.$$

Um das ungünstige arc tan $\frac{2}{3}$ zu entfernen, setzt man in $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta} = \frac{2}{3}$ $\tan\alpha = \frac{1}{5}$ ein, woraus $\tan\beta = \frac{7}{17}$ folgt. Man erhält so

b) $$\text{arc tan } \tfrac{2}{3} = \text{arc tan } \tfrac{1}{4} + \text{arc tan } \tfrac{7}{17}.$$

Um das ungünstige $\frac{7}{17}$ zu entfernen, setzt man in $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta} = \frac{7}{17}$ wiederum $\tan\alpha = \frac{1}{5}$, was $\tan\beta = \frac{9}{46}$ giebt. Es wird

c) $$\text{arc tan } \tfrac{7}{17} = \text{arc tan } \tfrac{1}{5} + \text{arc tan } \tfrac{9}{46}.$$

Einsetzung von $\tan\alpha = \frac{1}{5}$ in $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta} = \frac{9}{46}$ giebt schließlich $\tan\beta = -\frac{1}{239}$ und

d) $$\text{arc tan } \tfrac{9}{46} = \text{arc tan } \tfrac{1}{5} - \text{arc tan } \tfrac{1}{239}.$$

Bei Summierung der Gleichungen a) bis d) hebt sich alles weg, bis auf die Clausensche Formel

5) $$\frac{\pi}{4} = \text{arc tan } 1 = 4 \text{ arc tan } \tfrac{1}{5} - \text{arc tan } \tfrac{1}{239},$$

die schon recht brauchbare Reihen giebt.

Um noch Brauchbareres zu erhalten, setzte man in $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta} = \frac{1}{5}$ ein $\tan\alpha = \frac{1}{10}$, was $\tan\beta = \frac{5}{51}$ giebt, bildete also

e) $$\text{arc tan } \tfrac{1}{5} = \text{arc tan } \tfrac{1}{10} + \text{arc tan } \tfrac{5}{51},$$

setzte in $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta} = \frac{5}{51}$ wiederum $\tan\alpha = \frac{1}{10}$, was $\tan\beta = -\frac{1}{515}$ ergab, also

f) $$\text{arc tan } \tfrac{5}{51} = \text{arc tan } \tfrac{1}{10} - \text{arc tan } \tfrac{1}{515}.$$

Erweitert man die Gleichungen e) und f) mit dem Faktor 4 und addiert man die rechten und ebenso die linken Seiten der neuen Gleichungen und der Formel 5), so entsteht schließlich die Meißelsche Formel:

6) $$\frac{\pi}{4} = \text{arc tan } 1 = 8 \text{ arc tan } \tfrac{1}{10} - \text{arc tan } \tfrac{1}{239} - 4 \text{ arc tan } \tfrac{1}{515}.$$

Nur eine geringe Anzahl der Glieder von den Reihen für die genannten arc tan ist nötig, um mit 12 Stellen Genauigkeit

$$\pi = 3{,}141\,592\,653\,59\ldots$$

zu geben.

Selbstverständlich kann man die Konvergenz noch weiter treiben. Entsprechende oder dieselben Formeln erhielt Schellbach durch Nachweis gewisser Identitäten, z. B.

$$e^{2i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{2+i}{2-i}\cdot\frac{3+i}{3-i} = \frac{1+\frac{i}{2}}{1-\frac{i}{2}}\cdot\frac{1+\frac{i}{3}}{1-\frac{i}{3}},$$

woraus folgt

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i}\lg\left(\frac{1+\frac{i}{2}}{1-\frac{i}{2}}\cdot\frac{1+\frac{i}{3}}{1-\frac{i}{3}}\right) = \frac{1}{2i}\lg\frac{1+\frac{i}{2}}{1-\frac{i}{2}} + \frac{1}{2i}\lg\frac{1+\frac{i}{3}}{1-\frac{i}{3}},$$

was der Gleichung 4) entspricht.

Ebenso ist

$$\frac{2+i}{2-i} = \frac{3+i}{3-i}\cdot\frac{7+i}{7-i}, \quad \text{also} \quad \frac{1+i}{1-i} = \left(\frac{3+i}{3-i}\right)^2\left(\frac{7+i}{7-i}\right),$$

folglich gilt die Vegasche Formel

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{i}\lg\frac{1+\frac{i}{3}}{1-\frac{i}{3}} + \frac{1}{2i}\lg\frac{1+\frac{i}{7}}{1-\frac{i}{7}}$$

$$= 2\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3\cdot 3^3} + \tfrac{1}{5\cdot 3^5} - \tfrac{1}{7\cdot 3^7} + \cdots\right) + \left(\tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{3\cdot 7^3} + \tfrac{1}{5\cdot 7^5} - \tfrac{1}{7\cdot 7^7} + \cdots\right).$$

Ähnlich ist $(5 \pm i)^4 = 4\,(119 \pm 120\,i)$, folglich

$$\left(\frac{5+i}{5-i}\right)^4 = \frac{119+120\,i}{119-120\,i} = \frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{239+i}{239-i}.$$

So findet man wieder die Clausensche Formel

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4}{2i}\lg\frac{1+\frac{i}{5}}{1-\frac{i}{5}} - \frac{1}{2i}\lg\frac{1+\frac{i}{239}}{1-\frac{i}{239}}.$$

Um auch die Meißelsche Formel zu finden, zeige man, daß $(10 \pm i)^2 = (99 \pm 20\,i)$, also

$$\left(\frac{10+i}{10-i}\right)^2 = \frac{99+20\,i}{99-20\,i} = \frac{5+i}{5-i}\cdot\frac{515+i}{515-i}$$

ist, folglich

$$\frac{5+i}{5-i} = \left(\frac{10+i}{10-i}\right)^2 \cdot \frac{515+i}{515-i}$$

und

$$\frac{1+i}{1-i} = \left(\frac{10+i}{10-i}\right)^8 : \left[\frac{239+i}{239-i} \cdot \left(\frac{515+i}{515-i}\right)^4\right].$$

So ergiebt sich

$$\frac{\pi}{4} = \frac{8}{2i} \lg \frac{1+\frac{i}{10}}{1-\frac{i}{10}} - \frac{1}{2i} \lg \frac{1+\frac{i}{239}}{1-\frac{i}{239}} - \frac{4}{2i} \lg \frac{1+\frac{i}{515}}{1-\frac{i}{515}}.$$

VII. Zusammenstellung der wichtigsten Resultate.

1) Die ganzen rationalen Funktionen n^{ten} Grades $f(x)$ und $\varphi(x)$ sind identisch, wenn sie für $(n+1)$ Werte des Arguments übereinstimmen.

2) Für $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$ ist

$$\overset{x_1}{\underset{1}{F}} = \frac{ax_1}{1} + \frac{bx_1^2}{2} + \frac{cx_1^3}{3} + \frac{dx_1^4}{4} + \cdots + \frac{kx_1^{n+1}}{n+1},$$

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \frac{a(x_2 - x_1)}{1} + \frac{b(x_2^2 - x_1^2)}{2} + \frac{c(x_2^3 + x_1^3)}{3} + \cdots + \frac{k(x_2^{n+1} - x_1^{n+1})}{n+1},$$

und an jeder Stelle x ist die Neigung der Tangente

$$\tan\alpha = b + 2cx + 3dx^2 + \cdots + nkx^{n-1}.$$

3) Für $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ ist

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \frac{x_2 - x_1}{6}[y_1 + 4y_m + y_2],$$

wo y_m zur Stelle $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ gehört. (Simpson-Regel.)

4) Zur angenäherten Berechnung von Diagrammen dient $\overset{x_n}{\underset{x_0}{F}} = \frac{x_n - x_0}{6 \cdot \frac{n}{2}}[(h_0 + h_n) + 2(h_2 + h_4 + h_6 + \cdots + h_{n-2}) + 4(h_1 + h_3 + h_5 + \cdots + h_{n-1})]$.

5) Für die gleichseitige Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ ist

$$\overset{x_1}{\underset{1}{F}} = {}^e\lg x_1, \quad \overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = {}^e\lg \frac{x_2}{x_1}.$$

6) Für $y = x^p$ ist, sobald $p > -1$,

$$\overset{x_1}{\underset{1}{F}} = \frac{{x_1}^{p+1}}{p+1} \quad \text{und} \quad \overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \frac{{x_2}^{p+1} - {x_1}^{p+1}}{p+1}.$$

Bedenkliche Unendlichkeitsstellen zwischen x_1 und x_2 sind zu vermeiden.

7) Unendliche Reihen:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1+x} \text{ für } -1 < x < 1;$$

$$\frac{1}{n^{p+1}} \sum_1^n m^p = \frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$

für $n = \infty$ und $p > -1$;

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

für $-1 < x < 1$ und für jedes n;

$$\left.\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ a^x &= 1 + \frac{x\,{}^e\lg a}{1!} + \frac{(x\,{}^e\lg a)^2}{2!} + \frac{(x\,{}^e\lg a)^3}{3!} + \cdots \\ \sin x &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots \end{aligned}\right\} \text{für jedes } x.$$

Die Reihen für $\tan x$ und $\cot x$ siehe in Abschnitt 34.

$$\operatorname{arc\,sin} x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\frac{x^9}{9} + \cdots$$

$$\operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2} - \left[\frac{x_1}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots\right]$$

$$\operatorname{arc\,tan} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots$$

$$\left.\begin{aligned} {}^e\lg(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \\ {}^e\lg(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots \\ {}^e\lg\frac{1+x}{1-x} &= 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right] \end{aligned}\right\} \text{für} -1 < x < 1.$$

$${}^e\lg a = 2\left[\frac{a-1}{a+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^5 + \cdots\right] \text{ für positives } a.$$

$${}^e\lg(1+z) = 2\left[\frac{z}{2+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2+z}\right)^5 + \cdots\right] \text{für } z > -1.$$

$$\lg(x+y) = \lg x + 2\left[\frac{y}{2x+y} + \frac{1}{3}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^5 + \cdots\right]$$

für $\frac{y}{x} > -1$.

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i}\lg\frac{1+i}{1-i} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \cdots = \frac{1}{2i}\,{}^e\lg i.$$

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{1}{9} + \cdots$$

$$\pi = 2\sqrt{3}\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{3\cdot 3^1} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \frac{1}{9\cdot 3^4} - \cdots\right].$$

Fünfte Abteilung.

Von den Gleichungen höheren Grades.

I. Gleichungen dritten Grades.

38) Die allgemeine Gleichung dritten Grades ist schon in Teil II (Arithmetik Nr. 73) aufgelöst worden. Hier soll für die eigentliche Normalform

1) $$x^3 - 3\alpha x^2 + 3\beta x - \gamma = 0$$

eine andere Lösungsmethode entwickelt werden.

Durch die Substitution $x = y + \alpha$ geht die Gleichung über in

$$y^3 - 3y(\alpha^2 - \beta) = (2\alpha^3 - 3\alpha\beta + \gamma),$$

also in die Form

2) $$y^3 - 3ky = 2b.$$

Diese Gleichung stimmt in der Form überein mit der identischen Gleichung

3) $$(u + v)^3 - 3uv(u + v) = u^3 + v^3,$$

die aus der binomischen Formel für $(u + v)^3$ folgt.

Gleichung 2) stimmt mit 3) überein, sobald man $u^3 + v^3 = 2b$, $uv = k$ und $u + v = y$ setzt. Dadurch wird auch 2) in eine identische Gleichung verwandelt. Die Werte von y aber, die Gleichung 2) identisch erfüllen, heißen die Wurzeln der Gleichung 2). Diese müssen also durch $y = u + v$ bestimmt sein, sobald man u und v aus den genannten Gleichsetzungen berechnet.

Nun folgt aus

$$(u^3 + v^3)^2 = 4b^2$$

und

$$4u^3v^3 = 4k^3$$

durch Subtraktion und Wurzelausziehung

$$u^3 - v^3 = 2\sqrt{b^2 - k^3},$$

und durch Vergleichung mit $u^3 + v^3 = 2b$ folgt

$$u^3 = b + \sqrt{b^2 - k^3} \quad \text{und} \quad v^3 = b - \sqrt{b^2 - k^3}.$$

Es ist also, wenn man zunächst von der Dreideutigkeit der Kubikwurzel absieht,

$$u = \sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - k^3}} \quad \text{und} \quad v = \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 - k^3}}.$$

In Wirklichkeit handelt es sich um je drei Werte

$$u_1 = uw_1, \quad u_2 = uw_2, \quad u_3 = uw_3,$$
$$v_1 = vw_1, \quad v_2 = vw_2, \quad v_3 = vw_3,$$

wo die w die dritten Wurzeln aus der Einheit bedeuten, also

$$w_1 = 1, \quad w_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad w_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Es fragt sich nun, welche u und v in $y = u + v$ zusammengehören. Selbstverständlich ist so zu gruppieren, daß die Gleichung 3) identisch erfüllt bleibt. Dies ist nur der Fall, wenn man u_1 und v_1, u_2 und v_3, u_3 und v_2 kombiniert. Die Wurzeln der Gleichung 2) sind also

$$4)\begin{cases} y_1 = u_1 + v_1 = u + v = \sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - k^3}} + \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 - k^3}}, \\ y_2 = u_2 + v_3 = u\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + v\dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \\ \qquad = -\dfrac{u + v}{2} + i\sqrt{3}\,\dfrac{u - v}{2}, \\ y_3 = u_3 + v_2 = u\dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2} + v\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\ \qquad = -\dfrac{u + v}{2} - i\sqrt{3}\,\dfrac{u - v}{2}. \end{cases}$$

Der Ausdruck für y_1 heißt die Cardanische Formel, obwohl Geronimo Cardano die von Nicolo Tartalea entdeckte Formel nur veröffentlicht hat (1545).

39) Die drei Hauptfälle.

Man beschränkt sich für das praktische Rechnen in der Regel auf den Fall, wo die Koeffizienten der Gleichung 1) und daher auch die der Gleichung 2) reell sind.

Dann sind drei Fälle möglich.

a) Ist $b^2 - k^3$ positiv, so sind u und v reell, also y_1 reell, aber y_2 und y_3 konjugiert komplex.

b) Ist $b^2 - k^3 = 0$, so wird

$$y_1 = 2\sqrt[3]{b}, \quad y_2 = -\sqrt[3]{b}, \quad y_3 = -\sqrt[3]{b},$$

so daß sämtliche Wurzeln reell und die beiden letzten gleich sind.

c) Ist $b^2 - k^3$ negativ, so steht unter jeder Kubikwurzel Komplexes. Weil man ursprünglich mit dem Imaginären nicht zu rechnen verstand, nannte man diesen Fall den casus irreducibilis. Schon die Entwickelung der Wurzeln in binomischen Reihen, nämlich den Reihen für $\left(b \pm \sqrt{b^2 - k^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(b \pm i\sqrt{k^3 - b^2}\right)^{\frac{1}{3}}$, wo $i = \sqrt{-1}$ ist, würde gezeigt haben, daß es sich um konjugiert komplexe Ausdrücke handelt, so daß in $u_1 + v_1$ das Imaginäre wegfällt, ebenso in $u_2 + v_3$ und $u_3 + v_2$, daß also sämtliche Wurzeln reell sind.

Am besten übersieht man dies an der reducierten Schreibweise der komplexen Ausdrücke für u und v. Bei dieser wird

$$u = \sqrt[3]{b + i\sqrt{k^3 - b^2}} = \sqrt[3]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)},$$

wo $r = \sqrt{b^2 + (k^3 - b^2)} = +\sqrt{k^3}$ ist und φ sich aus $\cos\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{+\sqrt{k^3}}$ bestimmt, wobei das Vorzeichen von b über den ersten oder zweiten Quadranten entscheidet. (Die Substitution $\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{k^3}}$ ist gestattet, weil $k^3 > b^2$ angenommen ist, so daß der Bruch kleiner als 1 ist.)

Nach dem Moivreschen Satze wird jetzt

$$u_1 = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right) = \sqrt{k}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right),$$

$$u_2 = \sqrt{k}\left(\cos\frac{\varphi + 360^\circ}{3} + i\sin\frac{\varphi + 360^\circ}{3}\right),$$

$$u_3 = \sqrt{k}\left(\cos\frac{\varphi + 720^\circ}{3} + i\sin\frac{\varphi + 720^\circ}{3}\right),$$

und entsprechend

$$v_1 = \sqrt{k}\left(\cos\frac{\varphi}{3} - i\sin\frac{\varphi}{3}\right),$$

$$v_3 = \sqrt{k}\left(\cos\frac{\varphi + 360^\circ}{3} - i\sin\frac{\varphi + 360^\circ}{3}\right),$$

$$v_2 = \sqrt{k}\left(\cos\frac{\varphi + 720^\circ}{3} - i\sin\frac{\varphi + 720^\circ}{3}\right).$$

In $y = u + v$ sind nach Obigem die Werte so zu kombinieren, daß Reelles entsteht. (Die Indices von v sind der Analogie wegen den obigen entsprechend gewählt.) Demnach sind die Wurzeln von Gleichung 2) jetzt

$$5)\quad \begin{cases} y_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt{k}\cos\frac{\varphi}{3}, \\ y_2 = u_2 + v_3 = 2\sqrt{k}\cos\frac{\varphi+360^0}{3} = -2\sqrt{k}\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right), \\ y_3 = u_3 + v_2 = 2\sqrt{k}\cos\frac{\varphi+720^0}{3} = -2\sqrt{k}\cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right). \end{cases}$$

Damit ist der irreducible Fall erledigt.

40) **Bemerkungen.** Dasselbe Resultat ergiebt sich für den irreduciblen Fall selbständig auf folgendem goniometrischen Wege.

In der Gleichung 2) d. h. in

$$y^3 - 3ky = 2b$$

setze man $y = 2\sqrt{k}\,z$, so daß sie übergeht in $8k\sqrt{k}z^3 - 3k2\sqrt{k}z = 2b$ oder in

$$6)\qquad z^3 - \tfrac{3}{4}z = \tfrac{1}{4}\frac{b}{\sqrt{k^3}}.$$

Nun ist identisch

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi, \quad \text{oder} \quad \cos^3\varphi - \tfrac{3}{4}\cos\varphi = \tfrac{1}{4}\cos 3\varphi,$$

wo φ noch um 360^0 oder 720^0 vergrößert werden darf. Führt man in diese identische Gleichung den dritten Teil des Winkels ein, so lautet sie entweder

$$7)\qquad \left(\cos\tfrac{\varphi}{3}\right)^3 - \tfrac{3}{4}\cos\tfrac{\varphi}{3} = \tfrac{1}{4}\cos 3\tfrac{\varphi}{3} = \tfrac{1}{4}\cos\varphi,$$

oder

$$\left[\cos\frac{\varphi+360^0}{3}\right]^3 - \tfrac{3}{4}\cos\frac{\varphi+360^0}{3} = \tfrac{1}{4}\cos 3\frac{\varphi+360^0}{3} = \tfrac{1}{4}\cos\varphi,$$

d. h.

$$8)\quad \left[-\cos\left(60^0 - \tfrac{\varphi}{3}\right)\right]^3 - \tfrac{3}{4}\left[-\cos\varphi\left(60^0 - \tfrac{\varphi}{3}\right)\right] = \tfrac{1}{4}\cos\varphi,$$

oder endlich

$$\left[\cos\frac{\varphi+720^0}{3}\right]^3 - \tfrac{3}{4}\cos\frac{\varphi+720^0}{3} = \tfrac{1}{4}\cos 3\frac{\varphi+720^0}{3} = \tfrac{1}{4}\cos\varphi,$$

d. h.

$$9)\quad \left[-\cos\left(60^0 + \tfrac{\varphi}{3}\right)\right]^3 - \tfrac{3}{4}\left[-\cos\varphi\left(60^0 + \tfrac{\varphi}{3}\right)\right] = \tfrac{1}{4}\cos\varphi.$$

Gleichung 6) stimmt nun mit der identischen Gleichung 7) bezw. mit 8) oder 9) überein, sobald man $\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{k^3}}$ und außerdem $z = \cos\frac{\varphi}{3}$ bezw. $= -\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right)$ oder $= -\cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right)$ setzt. Da sie für die letzteren Werte von z identisch erfüllt ist, so sind diese die Wurzeln der Gleichung 6). Folglich sind die der Gleichung 2) wie vorher

$$y_1 = 2\sqrt{k}\cos\frac{\varphi}{3},\quad y_2 = -2\sqrt{k}\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right),$$

$$y_3 = -2\sqrt{k}\cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right).$$

41) Zusammenhang zwischen den Wurzeln und Koeffizienten.

Schon in Teil I ist gezeigt worden, daß das Produkt

10) $$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

auf

$$x^3 - x^2(x_1 + x_2 + x_3) + x(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - x_1x_2x_3,$$

d. h. auf die linke Seite der Normalform der Gleichung dritten Grades führt. Die Koeffizienten der letzteren sind demnach

11) $$\alpha = x_1 + x_2 + x_3,\ \beta = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1,\ \gamma = x_1x_2x_3.$$

Der erste Koeffizient ist also die Summe der Wurzeln, der zweite Koeffizient die Summe der Produkte von je zwei Wurzeln, der dritte ist das Produkt der drei Wurzeln.

Weil sämtliche Wurzeln in jedem Koeffizienten in übereinstimmender Weise vorkommen, bezeichnet man die Koeffizienten als symmetrische Funktionen der Wurzeln.

Die Auflösung der Gleichung ist also nichts anderes, als die Zerlegung der linken Seite in ein Produkt.

[Betrachtet man in dem Gleichungssysteme 11) die Wurzeln als Unbekannte, die man zu berechnen hat, so erhält man wieder eine Gleichung dritten Grades. Versuche dieselbe aufzustellen. Sie wird

$$x_3^3 - \alpha x_3^2 + \beta x_3 - \gamma = 0,$$

also von der alten Form.]

Will man sich selbst Gleichungen bilden, die auf den irreduciblen Fall führen, so wähle man lauter reelle Wurzeln, z. B. 2, 3 und 4. Das Beispiel giebt

$(x-2)(x-3)(x-4)=0$ oder $x^3-9x^2+26x-24=0$,

was noch mit einen konstanten Faktor multipliziert werden darf.

Soll dagegen die Gleichung auf den Cardanischen Fall führen, so wähle man eine reelle und zwei komplex konjugierte Wurzeln, z. B. 2, $3+4i$, $3-4i$. Dies giebt

$$(x-2)[x-(3+4i)][x-(3-4i)]=0$$

oder

$$x^3-8x^2+37x-50=0.$$

Würde man drei komplexe, oder eine komplexe und zwei reelle, oder eine reelle und zwei nicht konjugiert komplexe Wurzeln wählen, so würden die Koeffizienten der Gleichung nicht sämtlich reell werden. Auch solche Gleichungen lassen sich auflösen, sie haben aber für die Praxis geringeren Wert.

Sämtliche ganzen rationalen Funktionen dritten Grades, welche dieselben Wurzeln x_1, x_2 und x_3 haben, können sich höchstens um einen konstanten Faktor unterscheiden. Die einfachste ist

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$
$$=x^3-(x_1+x_2+x_3)x+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x^2-x_1x_2x_3;$$

alle anderen sind von der Form

$$\varphi(x)=k(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$
$$=kx^3-k(x_1+x_2+x_3)x+k(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x^2-kx_1x_2x_3.$$

Beide Funktionen werden zu Null für $x=x_1$, $x=x_2$, $x=x_3$. Sie stimmen also für drei Werte überein. Ist $k=1$, so stimmen sie auch für $x=\infty$ überein und sind daher identisch.

Jede ganze rationale Funktion 3^{ten} Grades kann in ein solches Produkt linearer Faktoren zerlegt werden, denn für jede kann man die Wurzeln finden.

---

42) Zusammenfassung der Resultate für numerische Berechnungen.

Die Gleichung

1) $$x^3-3\alpha x^2+3\beta x-\gamma=0$$

geht durch $x=y+\alpha$ über in

2) $$y^3-3ky=2b,$$

wo $k=\alpha^2-\beta$ und $2b=2\alpha^3-3\alpha\beta+\gamma$ ist.

Ist $b^2 - k^3$ positiv, so sind die Wurzeln von 2)

$$y_1 = u + v = \sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - k^3}} + \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 - k^3}},$$

$$y_2 = -\frac{u+v}{2} + i\sqrt{3}\,\frac{u-v}{2},$$

$$y_3 = -\frac{u+v}{2} - i\sqrt{3}\,\frac{u-v}{2}.$$

Ist $b^2 - k^3$ negativ, so bilde man φ aus $\cos\varphi = \frac{b}{+\sqrt{k^3}}$, dann sind die Wurzeln

$$y_1 = 2\sqrt{k}\cos\frac{\varphi}{3},\quad y_2 = -2\sqrt{k}\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right),$$

$$y_3 = -2\sqrt{k}\cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right).$$

Zum Schluß bilde man

$$x_1 = y_1 + \alpha,\quad x_2 = y_2 + \alpha,\quad x_3 = y_3 + a,$$

womit die Wurzeln von 1) gefunden sind.

43) Praktische Beispiele.

Aufgabe. Ein Kugelsegment sei der dritte Teil des Kugelkörpers. Wie groß ist seine Höhe?

Auflösung.

$$\frac{\pi x^2}{3}[3r - x] = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}r^3\pi,\quad \text{oder}\quad x^3 - 3rx^2 + \frac{4}{3}r^3 = 0.$$

Die reduzierte Gleichung wird

$$y^2 - 3r^2y = \frac{2r^3}{3}.$$

Der Hülfswinkel φ bestimmt sich aus $\cos\varphi = \frac{\frac{r^3}{3}}{\sqrt{r^6}} = \frac{1}{3}$ als $\varphi = 70^0\,31'\,44''$.

Die Lösungen von 2) werden also

$$y_1 = 2r\cos 23^0\,30'\,35'',\quad y_2 = -2r\cos 36^0\,29'\,25'',$$
$$y_3 = -2r\cos 83^0\,30'\,35'',$$

d. h.

$$y_1 = 1{,}83399r,\quad y_2 = -1{,}60791r,\quad y_3 = -0{,}226074r.$$

(Zur Probe: $y_1 + y_2 + y_3 = 0$!) Die Wurzeln der ursprünglichen Gleichung sind

$$x_1 = 2{,}83397r,\quad x_2 = -0{,}60791r,\quad x_3 = 0{,}77393r.$$

(Probe: $x_1 + x_2 + x_3 = 3r$.)

Die Lösungen x_1 und x_2 sind unbrauchbar, denn sie fallen außerhalb der Kugel, nur x_3 ist brauchbar, was durch Probe erhärtet werden kann.

Aufgabe. Eine Kugelzone hat die Grundradien r_1 und r_2 und den Inhalt J. Wie groß ist die Höhe?

Auflösung.

$$\frac{\pi x}{6}[3r_1^2 + 3r_2^2 + x^2] = J \quad \text{oder} \quad x^3 + 3x(r_1^2 + r_2^2) = \frac{6J}{\pi},$$

was schon von selbst die reduzierte Form ist. Es handelt sich um den Cardanischen Fall, so daß

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{3J}{\pi} + \sqrt{\left(\frac{3J}{\pi}\right)^2 + (r_1+r_2)^3}} + \sqrt[3]{\frac{3J}{\pi} - \sqrt{\left(\frac{3J}{\pi}\right)^2 + (r_1+r_2)^3}}$$

die einzige reelle Lösung ist.

Beispiel. $r_1 = 5$, $r_2 = 4$ und $J = 150$ giebt

$$x_1 = 2{,}23797.$$

Aufgabe. Ein Kugelsegment habe den Grundradius $\varrho = 15$ und den Inhalt $J = 822$. Wie groß ist die Höhe x?

Auflösung.

$$\frac{\pi x}{6}(x^2 + 3\varrho^2) = J, \quad \text{oder} \quad x^3 + 675x = 2 \cdot \frac{2466}{\pi}.$$

Die Cardanische Formel giebt als einzigen reellen Wert

$$x_1 = 2{,}3076.$$

Aufgabe. Ein Kugelsegment habe den Inhalt J und die Haubenfläche c. Wie groß ist die Höhe x?

Auflösung. $\frac{\pi x^2}{3}(3r - x) = J$ und $2r\pi x = c$ geben die Gleichung

$$x^3 - x\frac{3c}{2\pi} = -\frac{3J}{\pi}.$$

Aufgabe. Eine Kugel habe den Radius r und das spezifische Gewicht p $(p < 1)$. Wie tief sinkt sie ins Wasser ein?

Auflösung.

$$\frac{\pi x^2}{3}(3r - x) = \tfrac{4}{3}r^3\pi \cdot p \quad \text{oder} \quad x^3 - 3rx^2 + 4r^3p = 0.$$

Durch Substitution $x = y + r$ entsteht

$$y^3 - 3r^2y = 2r^3(1 - 2p).$$

Die Cosinus-Methode giebt $\cos\varphi = 1 - 2p$ (bei $p < \frac{1}{2}$ erster Quadrant, bei $p < \frac{1}{2}$ zweiter Quadrant). Die Lösungen von 2) sind

$$y_1 = 2r\cos\frac{\varphi}{3},\quad y_2 = -2r\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right),$$
$$y_3 = -2r\cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right),$$

also

$$x_1 = r\left(1 + 2\cos\frac{\varphi}{3}\right),\quad x_2 = r\left(1 - 2\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right)\right),$$
$$x_3 = r\left(1 - 2\cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right)\right).$$

Da $\varphi < 180^0$ ist, so ist $\frac{\varphi}{3} < 60^0$, folglich ist $\cos\frac{\varphi}{3} > \frac{1}{2}$ und $x_1 > 2r$, also x_1 unbrauchbar.

$60^0 - \frac{\varphi}{3}$ zwischen 0^0 und 60^0, also $\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right)$ zwischen 1 und $\frac{1}{2}$, folglich x_2 unbrauchbar, weil negativ.

$60^0 + \frac{\varphi}{3}$ zwischen 60^0 und 120^0, der cos zwischen $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$, folglich x_3 der einzige brauchbare Wert.

Beispiel.

$r = 1$ und $p = 0{,}81$ giebt $x_3 = 1{,}44215$.

$r = 6$ und $p = 0{,}3$ giebt $x_3 = 4{,}35909$.

Aufgabe. Ein Kugelsegment vom Kugelradius r, von der Höhe h und dem spezifischen Gewicht p (< 1) sinkt mit der Wölbung voran wie tief ins Wasser ein?

Auflösung.

$$\frac{\pi x^2}{3}(3r - y) = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)\,p$$

oder

$$x^3 - 3ry^2 + ph^2(3r - h) = 0.$$

Substitution $x = y + r$ giebt

$$y^3 - 3r^2y = 2r^3 - ph^2(3r - h).$$

Die Cosinus-Methode giebt

$$\cos\varphi = \frac{r^3 - \frac{ph^2}{2}(3r - h)}{r^3}.$$

Die Lösungen von 1) sind

$$x_1 = r\left(1 + 2\cos\frac{\varphi}{3}\right), \quad x_2 = r\left[1 - 2\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right)\right],$$
$$x_3 = r\left[1 - 2\cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right)\right].$$

Nur x_3 ist brauchbar.

Beispiel:

$r = 5$, $h = 3$, $p = 0{,}8$ giebt $x_3 = 2{,}644385$.

II. Gleichungen vierten Grades.

44) Allgemeine Auflösung.

Als Normalform ist zu betrachten

1) $$x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 - \gamma x + \delta = 0.$$

Durch die Substitution $x = y + \frac{\alpha}{4}$ geht sie über in eine Gleichung ohne die dritte Potenz, nämlich in

$$y^4 + y^2\left(-\tfrac{3}{8}\alpha^2 + \beta\right) + y\left(-\frac{\alpha^3}{8} + \frac{\alpha\beta}{2} - \gamma\right) + \left(-\frac{3\alpha^4}{256} + \frac{\alpha^2\beta}{16} - \frac{\alpha\gamma}{4} + \delta\right) = 0,$$

so daß man die Form

2) $$y^4 + ay^2 + by + c = 0$$

erhält. Um eine Produktzerlegung zu erhalten, führe man neue Unbekannte u, v und w ein und setze für die linke Seite versuchsweise

2*) $$(y^2 + uy + v)(y^2 - uy + w),$$

so daß man, da y^3 hier ebenfalls wegfällt, die Gleichung

3) $$y^4 + y^2(v + w - u^2) + yu(w - v) + vw = 0$$

erhält.

Sollen 2) und 3) übereinstimmen, so hat man zu setzen

$$v + w - u^2 = a, \quad u(w - v) = b, \quad vw = c.$$

Aus

$$w + v = a + u^2 \text{ und } w - v = \frac{b}{u}$$

folgt durch Subtraktion bezw. Addition

$$v = \tfrac{1}{2}\left(a + u^2 - \frac{b}{u}\right), \quad w = \tfrac{1}{2}\left(a + u^2 + \frac{b}{u}\right),$$

also durch Multiplikation

$$v \cdot w = \tfrac{1}{4}\left[(a + u^2)^2 - \frac{b^2}{u^2}\right],$$

also wegen $vw = c$

$$\tfrac{1}{4}\left[a^2 + 2au^2 + u^4 - \frac{b^2}{u^2}\right] = c,$$

oder

4) $$u^6 + 2au^4 + u^2(a^2 - 4c) - b^2 = 0.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich u, die eine der Hülfsgrößen, bestimmen, indem man $u^2 = z$ setzt. Man erhält zur Bestimmung die Gleichung dritten Grades

5) $$z^3 + 2az^2 + (a^2 - 4c)z - b^2 = 0.$$

Die Behandlung dieser Gleichung geschieht nach der im vorigen Abschnitte dargestellten Methode.

Da jetzt $u^2 = z$ bekannt ist, ist auch $v = \frac{1}{2}\left(a + u^2 - \frac{b}{u}\right)$ als bekannt zu betrachten, ebenso $w = \frac{1}{2}\left(a + u^2 + \frac{b}{u}\right)$.

Die gefundenen Werte werden eingesetzt in

$$(y^2 + uy + v)(y^2 - uy + w) = 0,$$

was mit Gleichung 2) identisch ist. Damit ist letztere zerlegt in zwei Gleichungen vom zweiten Grade:

$$y^2 + uy + v = 0$$
$$y^2 - uy + w = 0.$$

Die eine hat die Wurzeln

$$y_{1,2} = -\frac{u}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4} - v},$$

die andere

$$y_{3,4} = +\frac{u}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4} - w},$$

wo für u, v und w die gefundenen Werte einzusetzen sind. Damit sind die vier Werte für y gefunden und zugleich die für x. Ist eine der Wurzeln komplex, so muß nach den Formeln für die y auch die konjugierte Wurzel vorhanden sein.

Dabei war zunächst stillschweigend vorausgesetzt, daß für u, v und w stets reelle Größen gefunden werden, denn nur dann können 2) und 2*) übereinstimmen. Ob die Zerlegung in ein Produkt

$$(y^2 + uy + v)(y^2 - uy + w) = 0$$

mit reellen Koeffizienten stets möglich ist, soll untersucht werden, nachdem einige Beispiele berechnet worden sind.

45) Einige Beispiele.

Beispiel I. Die Gleichung

1) $$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$

geht durch Einsetzung von

$$x = y + \tfrac{10}{4} = y + \tfrac{5}{2}$$

über in

2) $$y^4 - \tfrac{5}{2}y^2 + \tfrac{9}{16} = 0.$$

Da hier auch das Glied mit y weggefallen ist, handelt es sich um eine quadratische Gleichung mit der Unbekannten $y^2 = z$. Man findet für 1) die Wurzeln 1, 2, 3 und 4.

Beispiel II. Die Gleichung

1) $$x^4 - 13x^3 + 59x^2 - 107x + 60 = 0$$

geht durch

$$x = y + \tfrac{13}{4}$$

über in

2) $$y^4 - \tfrac{35}{8}y^2 + \tfrac{15}{8}y + \tfrac{189}{256} = 0.$$

Hier ist

$$a = -\tfrac{35}{8}, \quad b = \tfrac{15}{8}, \quad c = \tfrac{189}{256}.$$

Die Hülfsgleichung

$$z^3 + 2az^2 + (a^2 - 4c)z - b^2 = 0$$

wird also

$$z^3 - \tfrac{35}{4}z^2 + \tfrac{259}{16}z - \tfrac{225}{64} = 0$$

oder

3) $$z^3 - 3 \cdot \tfrac{35}{12}z^2 + 3 \cdot \tfrac{259}{48}z - \tfrac{225}{64} = 0,$$

womit die Form

$$z^3 - 3\alpha z^2 + 3\beta z - \gamma = 0$$

gefunden ist.

$z = \eta + \frac{35}{12}$ verwandelt dies in

$$\eta^3 - 3k\eta = 2b,$$

wo

$$k = \alpha^2 - \beta = \left(\tfrac{35}{12}\right)^2 - \tfrac{259}{48} = \tfrac{28}{9},$$

$$2b = 2\alpha^3 - 3\alpha\beta + \gamma = 2\left(\tfrac{35}{12}\right)^3 - 3\,\tfrac{35}{12} \cdot \tfrac{259}{48} + \tfrac{225}{64} = \tfrac{160}{27}$$

ist, also $b = \frac{80}{27}$. Die letzte Hülfsgleichung lautet also

4) $$\eta^3 - 3\tfrac{28}{9}\eta = 2\tfrac{80}{27}.$$

Da $b^2 - k^3 = \frac{6400}{729} - \frac{21952}{729}$ negativ ist, hat man die Cosinus-Methode anzuwenden. Der Hülfswinkel bestimmt sich aus

$$\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{k^3}} = \frac{80}{\sqrt{21952}}$$

als

$$\varphi = 57^0\,19'\,10'',$$

so daß

$$\frac{\varphi}{3} = 19^0\,6'\,23''$$

ist. Die eine Wurzel von 4) ist demnach

$$\eta_1 = 2\sqrt{k}\cos\frac{\varphi}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{28}\cos 19^0\,6'\,23'' = \frac{10}{3}.$$

Dazu gehört

$$z_1 = \frac{10}{3} + \frac{35}{12} = \frac{75}{12} = \frac{25}{4} = u^2,$$

so daß $u = \frac{5}{2}$ eine Wurzel der nicht hingeschriebenen Hülfsgleichung

$$u^6 + 2au^4 + u^2(a^2 - 4c) - b^2$$

ist.

Demnach ist

$$v = \frac{1}{2}\left(a + u^2 - \frac{b}{u}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{35}{8} + \frac{25}{4} - \frac{15}{8}\cdot\frac{2}{5}\right) = \frac{9}{16}.$$

Folglich

$$y_{1,2} = -\frac{u}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4} - v} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{9}{16}} = -\frac{5}{4} \pm 1,$$

d. h.

$$y_1 = -\frac{1}{4},\quad y_2 = -\frac{9}{4}.$$

Schon damit ist als Wurzel von Gleichung 1) gefunden

$$x_1 = -\frac{1}{4} + \frac{13}{4} = \frac{12}{4} = 3,\quad x_2 = -\frac{9}{4} + \frac{13}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Die übrigen Wurzeln bestimmen sich ebenso einfach als $x_3 = 4$ und $x_4 = 5$. Man kann dazu auch die Beziehungen zwischen den Wurzeln und den Koeffizienten benutzen. Siehe unten (Nr. 47).

46) Allgemeine Bemerkungen.

Statt $u_1 = \frac{5}{2}$ konnte im letzten Beispiele auch $u_1 = -\frac{5}{2}$ benutzt werden. Denn auch dann wären v und w reelle Größen geworden. Ob statt η_1 auch η_2 und η_3 benutzt werden dürfen (die hier sämtlich reell waren), darüber wird allgemein folgendermaßen entschieden.

Die Gleichung 5) für z in Abschnitt 44 hat reelle Koeffizienten a und $a^2 - 4c$, folglich ist sie für uns stets lösbar. Nun sind zwei Hauptfälle möglich:

a) sämtliche Wurzeln z_1, z_2, z_3 sind reell;

b) eine, z. B. z_1 ist reell, die beiden andern, z_2 und z_3 sind der reellen Koeffizienten wegen konjugiert komplex und von der Form $p \pm qi$.

Fall a) Weil $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = b^2$, also positiv ist, so sind entweder sämtliche z positiv, oder eins davon, z. B. z_1 ist positiv, die andern beiden aber sind negativ. Andere Fälle sind ausgeschlossen. In dem einen Unterfalle giebt jedes z ein reelles $u = \sqrt{z}$, im andern giebt das eine positive ein reelles $u = \sqrt{z}$. Im einen Falle kann man also die Zerlegung mit drei verschiedenen u, im andern nur mit dem einen u vornehmen.

Fall b) Weil

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = z_1 \cdot (p + qi)(p - qi) = z_1 \cdot (p^2 + q^2)$$

gleich der positiven Größe b^2 sein muß, und weil der Faktor $p^2 + q^2$ stets positiv ist, so muß z_1 notwendig positiv sein, also giebt es auch hier ein reelles u.

Damit ist gezeigt, daß man stets mindestens ein reelles u findet und die angegebene Zerlegung stets möglich ist.

47) Zusammenhang zwischen den Wurzeln und Koeffizienten.

Jede Gleichung vierten Grades mit reellen Koeffizienten kann nach Obigem aufgelöst werden. Folglich läßt sich jede ganze rationale Funktion vierten Grades mit reellen Koeffizienten in ein Produkt von vier linearen Faktoren zerlegen, d. h. es ist

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4),$$

sobald x_1, x_2, x_3 und x_4 die Wurzeln der entsprechenden Gleichung sind. Sämtliche andern ganzen rationalen Funktionen vierten Grades, welche dieselben Wurzeln haben, können sich von dem Produkte nur um einen konstanten Faktor unterscheiden.

Multipliziert man das letztere aus, so erhält man

$$\begin{aligned} &x^4 - x^3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ &+ x^2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) \\ &- x(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) + x_1x_2x_3x_4. \end{aligned}$$

Folglich bestehen zwischen den Koeffizienten und den Wurzeln der Gleichung

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$$

die Beziehungen

$$a = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$
$$b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4,$$
$$c = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4,$$
$$d = x_1x_2x_3x_4,$$

die leicht in Worte zu kleiden sind.

(Summe der Wurzeln, bezw. Summe aller möglichen Produkte aus je 2, 3, 4 Wurzeln.)

Es ist also leicht, Gleichungen vom vierten Grade aufzustellen, die gegebene Wurzeln haben sollen.

Sollen aber sämtliche Koeffizienten reell werden, so können komplexe Wurzeln nur in gerader Anzahl vorkommen, und sie müssen (nach den Schlußformeln für y) paarweise konjugiert sein.

So kann man z. B. Gleichungen bilden, die folgende Wurzeln haben:

$$2,\ 5,\ 6,\ 9;\quad 2,\ 5,\ 6+3i,\ 6-3i;$$
$$2+5i,\ 2-5i,\ 6+3i,\ 6-3i;\quad \text{u. s. w.}$$

III. Andeutungen über die Gleichungen n^{ten} Grades.

48) Die Wurzeln und Koeffizienten.

Die Gleichung n^{ten} Grades

1) $$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n) = 0$$

hat die Wurzeln $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, denn setzt man x gleich einem dieser Werte, so ist sie erfüllt.

Multipliziert man aus, so erhält man links eine ganze rationale Funktion vom n^{ten} Grade, also

$$x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} - cx^{n-3} + \cdots + kx - l$$

oder

$$x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} - cx^{n-3} + \cdots - kx + l,$$

je nachdem n eine ungerade oder gerade ganze Zahl ist. Dabei ist

$$a = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + n = \sum x_p,$$

$$b = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + \cdots + x_{n-1} x_n = \sum x_p x_q,$$

$$c = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \cdots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = \sum x_p x_q x_r,$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$l = x_1 x_2 x_3 \cdots x_n \qquad\qquad = x_1 x_2 x_3 \cdots x_n,$$

was leicht in Worte zu fassen ist.

Jede ganze rationale Funktion n^{ten} Grades, welche für dieselben Werte von x verschwindet und mit x^n beginnt, ist mit der Funktion 1) identisch.

Bemerkung. Damit zwei Funktionen identisch seien, müssen sie nach Seite 120 für mindestens $(n+1)$ Werte von x übereinstimmen. Die Übereinstimmung in $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist angenommen. Ein $(n+1)^{\text{ter}}$ Wert, in dem beide übereinstimmen, ist der Wert $x = \infty$. An einem Beispiele ist dies leicht zu verdeutlichen. Man betrachte zwei Funktionen

$$y = 3x^2 + 5x + 7 = x^2\left(3 + \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}\right)$$

und

$$\eta = 5x^2 + 8x + 6 = x^2\left(5 + \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2}\right).$$

In jeder von ihnen werde $x = \infty$ gesetzt, dann wird $y = 3x^2$, $\eta = 5x^2$, so daß sich für $x = \infty$ die Werte der Funktionen wie 3 und 5 verhalten. Dagegen werden die Funktionen

$$y = 3x^2 + 5x + 7 = x^2\left(3 + \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}\right)$$

und

$$\eta = 3x^2 + 8x + 6 = x^2\left(3 + \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2}\right)$$

für $x = \infty$ beide gleich $3x^2$, d. h. sie stimmen für $x = \infty$ überein. So ist es stets, wenn die höchsten Potenzen denselben Faktor haben.

Damit ist die Übereinstimmung im $(n+1)^{\text{ten}}$ Werte für die beiden oben untersuchten Funktionen n^{ten} Grades nachgewiesen.

Ob jede ganze rationale Funktion n^{ten} Grades n Wurzeln hat, das bleibe vorläufig dahingestellt. Hat aber die Funktion n Wurzeln, so finden zwischen diesen und den Koeffizienten $a, b, c, \ldots, l$ die oben genannten Beziehungen statt.

Nur von diesem Falle soll vorläufig die Rede sein.

49) Sind die Koeffizienten $a, b, c, \ldots, l$ reell, so muß zu jeder etwa vorkommenden komplexen Wurzel $p + qi$ auch die konjugierte $p - qi$ vorhanden sein.

Beweis an einem Beispiele.

$$f(z) = z^2 + az + b$$

verschwinde für den komplexen Wert $z_1 = x_1 + y_1 i$, dann ist

$$\begin{aligned} f(z_1) &= (x_1 + y_1 i)^2 + a(x_1 + y_1 i) + b \\ &= x_1^2 + 2x_1 y_1 i - y_1^2 + ax_1 + ay_1 i + b \\ &= (x_1^2 - y_1^2 + ax_1 + b) + i(2x_1 y_1 + ay) = 0, \end{aligned}$$

folglich ist der reelle Teil für sich gleich Null und ebenso der imaginäre. Da aber

$$(x_1 - y_1^2 + ax_1 + b) = 0$$

und

$$i(2x_1 y_1 + ay_1) = 0$$

ist, so folgt auch

$$(x_1 - y_1^2 + ax_1 + b) - i(2x_1 y_1 + ay_1) = 0,$$

d. h. es ist auch

$$(x_1 - y_1 i)^2 + a(x_1 - y_1 i) + b = 0.$$

Folglich: Wenn $f(z) = z^2 + az + b$ für $z_1 = x_1 + y_1 i$ verschwindet, so verschwindet es auch für $z_1' = x_1 - y_1 i$.

Ganz dasselbe gilt, wie die Anwendung des binomischen Satzes auf $(x + y_1)$ zeigt, auch für Funktionen vom n^{ten} Grade. Bei jeder zeigt sich, daß

$$f(x_1 + y_1 i) = U_1 + V_1 i$$

sich in einen reellen und einen imaginären Teil zerlegen läßt, und daß beim Verschwinden der Funktion U_1 und V_1 für sich gleich Null sein müssen. Ist demnach $f(x_1 + y_1 i) = 0$, so muß auch

$$f(x_1 - y_1 i) = U_1 - V_1 i = 0$$

sein. Der Beweis gilt aber nur, weil das Imaginäre nicht in den Koeffizienten, sondern nur in dem Argumente $z = x + yi$ enthalten ist.

Nur dadurch, daß zu jeder Wurzel zugleich die konjugierte vorhanden ist, wird es ermöglicht, daß die Koeffizienten $a, b, c, \ldots, l$ reell sind.

In jedem heben sich die imaginären Bestandteile gegenseitig auf.

50) Andeutungen über den Fundamentalsatz.

Hat die Funktion n^{ten} Grades n Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$, so ist sie durch $(x - x_1)$, $(x - x_2)$, ..., $(x - x_n)$ ohne Rest teilbar.

Kennt man also von einer entsprechenden Gleichung eine Wurzel x_1, so kann man die Gleichung durch Division mit $(x - x_1)$ auf den $(n - 1)^{ten}$ Grad zurückführen.

Mit Hülfe von Stetigkeitsbetrachtungen, die über das Ziel der Schule hinausgehen, beweist die höhere Analysis, daß jede ganze rationale Funktion n^{ten} Grades mindestens eine Wurzel haben muß.

[Elementar erkennt man dies sofort an den ungeraden Funktionen. So sieht man z. B. daß

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = x^3\left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}\right)$$

für $x = +\infty$ den positiven Grenzwert $+x^3$ hat, dagegen für $x = -\infty$ den negativen Grenzwert $-x^3$. Nach Seite 133 muß also zwischen $+\infty$ und $-\infty$ mindestens eine Wurzel liegen.]

Ist dieser Satz bewiesen, so gilt er auch für die Funktion $(n - 1)^{ten}$ Grades, die man durch Division durch $(x - x_1)$ erhält. Folglich muß noch eine zweite Wurzel x_2 existieren. Man dividiert durch $(x - x_2)$, erhält den $(n - 2)^{ten}$ Grad und wiederholt so den Schluß.

So wird bewiesen, daß jede ganze rationale Funktion n^{ten} Grades n Wurzeln haben muß.

Erst Gauß ist es gelungen, den wichtigen Satz streng zu beweisen, was nur dadurch möglich war, daß die Variable x genötigt wurde, alle möglichen komplexen Zahlenwerte anzunehmen. Die Einführung der komplexen Größen ist also die Vorbedingung für den Fundamentalsatz der Algebra. Nur durch sie war eine wissenschaftliche Abrundung dieses Gebietes zu ermöglichen. Diese kann aber nur auf der Hochschule gegeben werden.

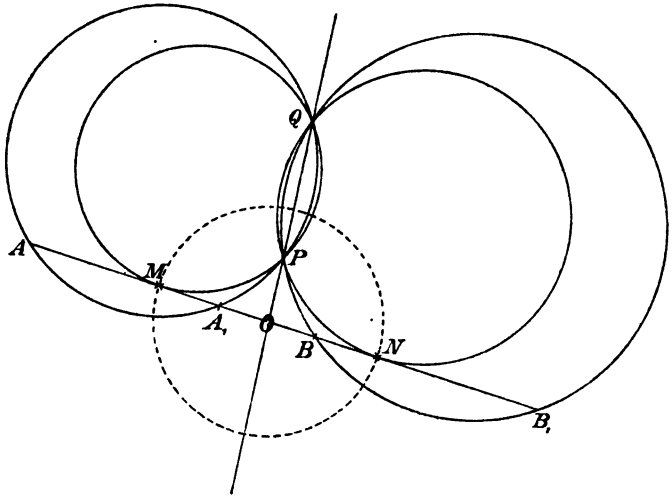
Anhang.

I. Involutorische Punktreihen.

1) Eine Reihe geometrischer Konstruktionen, insbesondere solche der Kegelschnitte aus fünf Elementen, sind erst durch die Einführung des Begriffes der Involution lösbar geworden, auf den man in anschaulicher Weise durch Vermittelung des Kreisbüschels gelangt.

Figur 146 stellt das durch zwei Punkte P und Q gehende Kreisbüschel dar, welches durch eine beliebige Transversale geschnitten

Fig. 146.



ist, jedoch so, daß der Schnittpunkt O mit der Potenzlinie außerhalb der Strecke PQ liegt. Diese Gerade berührt zwei der Büschelkreise in Punkten M und N, trifft die kleineren Kreise des Büschels nicht, schneidet aber jeden der größeren in zwei Punkten, z. B. in A und A_1, in B und B_1 u. s. w.

Dadurch sind die Punkte der Geraden paarweise einander zugeordnet, A_1 ist der zu A, B_1 der zu B zugeordnete Punkt u. s. w. In M fallen zwei einander zugeordnete Punkte zusammen, ebenso in N, so daß man M und ebenso N als Doppelpunkte bezeichnen kann.

2) Dabei finden gewisse Beziehungen statt. Es ist

$$OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1 = OC \cdot OC_1 = \cdots = OM^2 = ON^2,$$

denn jedes dieser Produkte ist gleich $OP \cdot OQ$, d. h. gleich der Potenz $+ k^2$ des Punktes O in Bezug auf jeden der Büschelkreise. Mit Hülfe dieser Beziehung kann man die paarweise Zuordnung der Punkte auf eine andere Art konstruktiv durchführen. (Vierte Proportionale.)

3) Schlägt man um O mit $OM = ON$ einen Kreis, so schneidet derselbe jeden Büschelkreis rechtwinklig, folglich sind AA_1MN harmonische Punkte, ebenso BB_1MN, CC_1MN u. s. w. [Vgl. II, Nr. 78, oder wende folgende Berechnung an:

$$OA \cdot OA_1 = OM^2,$$

daher

$$OM : OA_1 = OA : OM,$$

folglich

$$(OM + OA_1) : (OM - OA_1) = (OA + OM) : (OA - OM),$$

oder

$$(NO + OA_1) : (OM - OA_1) = (OA + NO) : (OA - OM),$$

d. h.

$$NA_1 : A_1M = NA : MA.]$$

4) Sind also auf der Geraden die festen Punkte M und N gegeben und nimmt A alle möglichen Lagen außerhalb MN auf der Geraden an, so beschreibt der vierte harmonische Punkt innerhalb MN die entsprechenden Lagen und die paarweise Zuordnung ist dieselbe wie die durch die obigen Büschelkreise gegebenen. Hierin liegt die Möglichkeit einer Konstruktion der paarweisen Zuordnung ohne Benutzung des Zirkels.

5) Sind die Punktpaare einer Geraden in der besprochenen Weise einander zugeordnet, so nennt man die Punktreihe eine involutorische oder ein Punktsystem in Involution. O heißt der Mittelpunkt des Systems, das konstante Produkt $OA \cdot OA_1 = + k^2$ heißt die Potenz des Punktsystems. M und N heißen die Doppel-

punkte oder Asymptotenpunkte der Punktreihe. Durch Projektion geht eine involutorische Punktreihe wiederum in eine solche über, denn die harmonischen Beziehungen bleiben erhalten.

Ist $OA \cdot OA_1$ positiv, wie es hier angenommen wurde, so nennt man die Punktreihe nach Steiner eine hyperbolische Punktreihe. Der Grund dieser Benennung kann erst später angegeben werden.

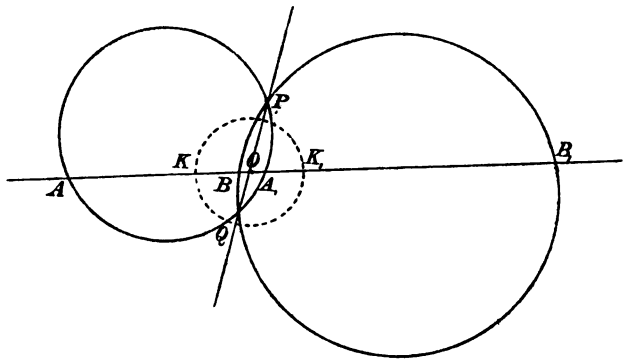
6) Man hat nur nötig die Transversale so zu legen, daß sie die Potenzlinie in einem Punkte O innerhalb der Strecke PQ schneidet, um auf den Fall mit negativer Potenz zu gelangen.

In Figur 147 ist das Produkt $OA \cdot OA_1 = OP \cdot OQ$ negativ, also gleich einer Konstanten $-k^2$. Für das gesamte Kreisbüschel ist

$$OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1 = OC \cdot OC_1 = \cdots = -k^2.$$

Von dieser Beziehung ausgehend kann man die paarweise Zuordnung selbständig konstruktiv ausführen. Schlägt man jetzt um O mit K einen Kreis, so wird jeder Kreis des Büschels in den Endpunkten

Fig. 147.



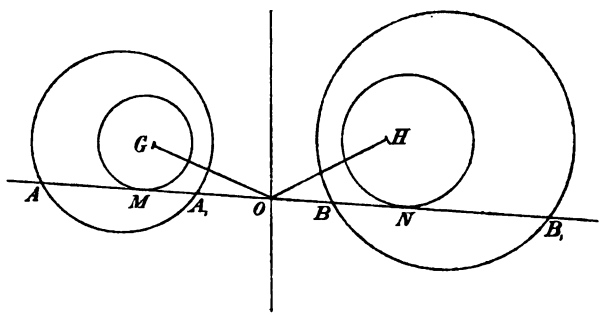
der kürzesten durch O zu legenden Sehne geschnitten. Dieser Kreis schneidet die Gerade in Punkten K und K_1, die im allgemeinen die einzigen einander zugeordneten sind, die von O gleiche Entfernung haben. (Einer der Büschelkreise geht durch P, Q, K und K_1.) Da jetzt sämtliche Kreise in zwei Punkten geschnitten werden, eine Berührung aber nicht stattfindet, so giebt es jetzt keine Doppelpunkte. Das Punktsystem heißt ebenfalls ein involutorisches und wird nach Steiner als ein elliptisches bezeichnet. Daß die Involution auch hier durch Projektion nicht aufgehoben wird, soll unten gezeigt werden.

7) [In abstrakterer Auffassung sagt man, die Doppelpunkte M und N seien jetzt imaginär, die imaginäre Tangente sei von der Länge $k\sqrt{-1}$, ihr Quadrat also gleich $-k^2$. Wie vorher jedes Punktpaar durch die reellen Punkte M und N getrennt war, so sei jetzt ein jedes durch die imaginären Punkte M und N harmonisch getrennt.]

8) Noch ein dritter Fall ist möglich, daß die schneidende Gerade durch einen der Büschelpunkte P und Q geht. Dann heißt die Punktreihe eine parabolische. Die Potenz ist dann gleich Null. M, N und O fallen in einem Punkte zusammen.

9) Statt die Gerade durch ein Kreisbüschel zu legen, kann man sie auch durch eine Kreisschar gehen lassen. Auch dabei ist $OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1 = OC \cdot OC_1 \cdots = OM^2 = ON^2 = OG^2 = OH^2$,

Fig. 148.



wo G und H die Grenzpunkte der Kreisschar sind. Die Beziehungen bleiben also dieselben, wie oben, nur ist die Punktreihe im allgemeinen eine hyperbolische.

10) **Aufgabe.** Es soll untersucht werden, welche Eigentümlichkeiten die elliptische oder hyperbolische Punktreihe annimmt, wenn die Gerade parallel zur Centrale oder parallel zur Potenzlinie gelegt wird, und wie dann die Doppelpunkte und der Mittelpunkt O liegen.

11) **Aufgabe.** Es soll gezeigt werden, daß eine involutorische Punktreihe entsteht, wenn jeder Punkt P einer Kreislinie von den beiden Endpunkten C und O eines Durchmessers aus auf eine zum Durchmesser senkrechte Gerade projiziert wird.

Bemerkung. Der Beweis ergiebt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke COA_1 und AOD, wonach $OA \cdot OA_1 = +k^2$ oder $-k^2$

Fig. 149a.

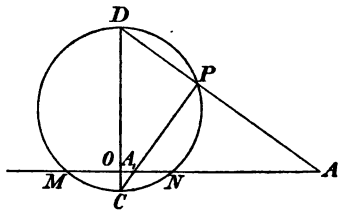
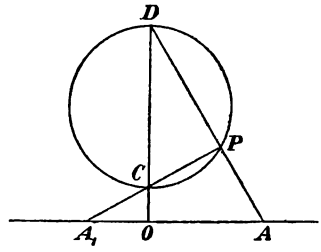


Fig. 149b.



ist, je nachdem O innerhalb oder außerhalb des Kreises liegt. Der erstere Fall giebt eine hyperbolische, der letztere eine elliptische Punktreihe. Im Falle der Berührung entsteht ein parabolisches Punktsystem.

12) **Aufgabe.** Von einer involutorischen Punktreihe sind zwei Punktpaare A und A_1, B und B_1 gegeben. Ihr Mittelpunkt O soll konstruiert werden.

Auflösung. Man lege durch A und A_1 einen Kreis, ebenso durch B und B_1, die Potenzlinie schneidet dann die Gerade im gesuchten Punkte O. (Am bequemsten ist es im allgemeinen, zwei sich schneidende Kreise zu zeichnen, da dann die Potenzlinie ohne weiteres gezogen werden kann.)

13) **Aufgabe.** Von einer hyperbolischen Punktreihe sind zwei Punktpaare A und A_1, B und B_1 gegeben; die Doppelpunkte sollen gefunden werden.

Auflösung. Man konstruiere wie vorher den Mittelpunkt O und schlage um ihn mit k, der mittleren Proportionale von OA und OA_1, einen Kreis. Dieser schneidet die gegebene Gerade in den Doppelpunkten M und N.

14) **Aufgabe.** Von einer elliptischen Punktreihe sind zwei Punktpaare A und A_1, B und B_1 gegeben; dasjenige Punktpaar soll gesucht werden, dessen Verbindungslinie durch O halbiert wird. (Auflösung wie vorher.)

15) **Aufgabe.** Von einer Punktreihe sind zwei Punktpaare A und A_1, B und B_1 gegeben. Zu einem beliebigen Punkte C soll der zugeordnete gesucht werden.

Auflösung 1. Man suche O und bestimme OC_1 aus der Gleichung

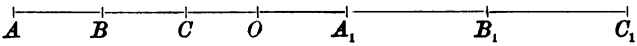
$$OA \cdot OA_1 = OC \cdot OC_1$$

oder gemäß der Proportion

$$OC : OA = OA_1 : OC_1.$$

Auflösung 2. Man lege durch A und A_1 einen Kreis und durch B und B_1 einen andern, der den ersteren in Punkten P und Q schneidet. Der durch P, Q und C gelegte Kreis schneidet die gegebene Gerade in C_1.

16) **Aufgabe.** Welche Beziehungen bestehen zwischen je drei Punktpaaren einer involutorischen Punktreihe?



Auflösung. Ist die Punktreihe z. B. eine elliptische, ist O ihr Mittelpunkt und $-k^2$ die Potenz, so ist

$$OA_1 = \frac{-k^2}{OA} \quad \text{und} \quad OB = \frac{-k^2}{OB_1},$$

oder

$$BO = \frac{k^2}{OB_1},$$

folglich

$$BO + OA_1 = BA_1 = \frac{k^2}{OB_1} - \frac{k^2}{OA} = k^2 \frac{OA - OB_1}{OA \cdot OB_1}$$
$$= k^2 \frac{OA + B_1O}{OA \cdot OB_1} = k^2 \frac{B_1A}{OA \cdot OB_1},$$

also

$$A_1B = k^2 \frac{AB_1}{OA \cdot OB_1}.$$

Ebenso ist

$$A_1B_1 = k^2 \frac{AB}{OA \cdot OB}, \quad A_1C = k^2 \frac{AC_1}{OA \cdot OC_1}, \quad A_1C_1 = k^2 \frac{AC}{OA \cdot OC},$$

folglich

$$\frac{A_1B \cdot A_1B_1}{A_1C \cdot A_1C_1} = \frac{AB_1 \cdot AB}{OA^2 \cdot OB \cdot OB_1} \cdot \frac{OA^2 \cdot OC \cdot OC_1}{AC \cdot AC_1}.$$

Hebt man OA^2 und außerdem $OB \cdot OB_1 = OC \cdot OC_1 = -k^2$, so bleibt eine Gleichung stehen, die sich schreiben läßt als

$$\frac{A_1B}{AB} \cdot \frac{AC}{A_1C} = \frac{AB_1}{A_1B_1} \cdot \frac{A_1C_1}{AC_1},$$

d. h.: Die Doppelverhältnisse (A_1ABC) und $(AA_1B_1C_1)$ sind einander gleich.

Folglich: Stehen drei Punktpaare in Involution, bildet man aus vier beliebigen der Punkte ein Doppelverhältnis und das entsprechende Doppelverhältnis der zugeordneten Punkte, so sind beide Doppelverhältnisse gleich, sobald in der Gleichung alle drei Punktpaare vorkommen.

Doppelverhältnisse wie (AA_1BB_1) und das zugeordnete (A_1AB_1B) sind auszuschließen, da sie nur zwei Punktpaare enthalten, deren Anordnung willkürlich sein darf, so daß von Gleichheit der Doppelverhältnisse nicht gesprochen werden kann.

Ganz ebenso wird der Beweis für die hyperbolische Punktreihe geführt.

17) [Es war

1) $\frac{A_1B}{AB}\cdot\frac{AC}{A_1C}=\frac{AB_1}{A_1B_1}\cdot\frac{A_1C_1}{AC_1}$ oder $(A_1ABC)=(AA_1B_1C_1)$.

Durch cyklische Vertauschung folgt daraus (ebenso durch die nach Seite 28 gestattete Vertauschung von A und A_1 mit B und B_1 in den Doppelverhältnissen)

2) $\frac{B_1C}{BC}\cdot\frac{BA}{B_1A}=\frac{BC_1}{B_1C_1}\cdot\frac{B_1A_1}{BA_1}$ oder $(B_1BCA)=(BB_1C_1A_1)$

und ebenso

3) $\frac{C_1A}{CA}\cdot\frac{CB}{C_1B}=\frac{CA_1}{C_1A_1}\cdot\frac{C_1B_1}{CA_1}$ oder $(C_1CAB)=(CC_1A_1B_1)$.

Durch Multiplikation folgt aus 1), 2) und 3) eine Gleichung, die sich durch Heben der gleichen Stücke schließlich auf

4) $$AB\cdot A_1C\cdot B_1C=A_1B_1\cdot AC_1\cdot BC$$

zurückführen läßt. Durch Vertauschung von A und A_1 bezw. B und B_1 oder C und C_1 folgt der Reihe nach

5) $$A_1B\cdot AC\cdot B_1C_1=AB_1\cdot A_1C_1\cdot BC,$$

6) $$AB_1\cdot A_1C\cdot BC_1=A_1B\cdot AC_1\cdot B_1C,$$

7) $$AB\cdot A_1C_1\cdot B_1C=A_1B_1\cdot AC\cdot BC_1.$$

Die genannten Vertauschungen sind gestattet, weil im Punktsystem A dieselbe Rolle spielt, wie A_1, ebenso B wie B_1 und C wie C_1. Diese sieben Gleichungen sind von Désargues aufgestellt. Die Vertauschbarkeit der konjugierten Punkte ohne Änderung des Doppelverhältniswertes wird der Grund zur Bezeichnung Involution gewesen sein.]

18) **Umkehrung.** Liegen drei Punktpaare A, A_1, B, B_1, C, C_1 so, daß eines der oben genannten Doppelverhältnisse ungeändert bleibt, wenn man für jeden Punkt seinen zugeordneten setzt, so stehen die Punkte in Involution.

Beweis. Es sei

$$(A_1 ABC) = (AA_1 B_1 C_1).$$

Angenommen, die sechs Punkte ständen nicht in Involution, sondern an Stelle von C_1 würde X mit den übrigen eine Involution bilden, so würde sein

$$(A_1 ABC) = (AA_1 B_1 X),$$

folglich

$$(AA_1 B_1 X) = AA_1 B_1 C).$$

Da aber je drei Punkte der beiden letzten Doppelverhältnisse identisch sind, so müssen auch C und X zusammenfallen. Die gegebenen Punkte bilden also eine Involution. —

Da durch Projektion die Werte der Doppelverhältnisse nicht geändert werden, so bleibt dabei die Gleichung

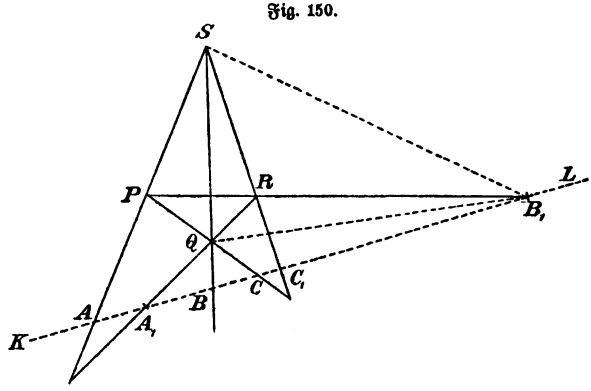
$$(A_1 ABC) = (AA_1 B_1 C_1)$$

mit allen zugehörigen Gleichungen ebenfalls erhalten. Folglich:

Projektion eines involutorischen Punktsystems giebt stets ein involutorisches Punktsystem.

Damit ist dieser Satz, der oben nur von den hyperbolischen Punktreihen bewiesen war, allgemein bewiesen.

Fig. 150.



19) **Satz.** Das vollständige Viereck wird von jeder beliebigen Geraden in einer Involution geschnitten, und

zwar sind die Schnittpunkte mit je zwei Gegenseiten zugeordnete Punkte.

Beweis. $PQRS$ sei das vollständige Viereck mit seinen Diagonalen, KL sei die schneidende Gerade, dann sind die Büschel $S(PQRB_1)$ und $Q(PSRB_1)$ perspektivisch, schneiden also die Transversale KL in perspektivischen Punkten, wobei die Doppelverhältnisse erhalten bleiben. Es ist also

$$(ABC_1B_1) = (CBA_1B_1),$$

da aber auf Grund zulässiger Vertauschung

$$(CBA_1B_1) = (A_1B_1CB)$$

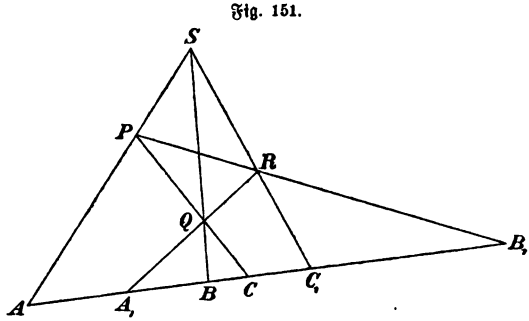
ist (vergl. Seite 28), so ist

$$(ABC_1B_1) = (A_1B_1CB).$$

Da in dem zweiten Doppelverhältnis die zugeordneten Punkte zu denen des ersten stehen, so stehen die sechs Schnittpunkte in Involution.

20) **Aufgabe.** Gegeben seien von einer Punktreihe zwei Punktpaare A und A_1, B und B_1 und ein beliebiger Punkt C_1. Der zugeordnete Punkt C zum letzteren soll ohne Hülfe des Zirkels konstruiert werden.

Fig. 151.

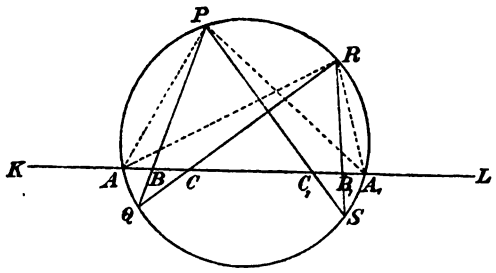


Auflösung. Man verbinde A_1, B_1 und C_1 mit einem beliebigen Punkte R der Ebene und nehme auf R_1C_1 einen beliebigen Punkt S an, den man mit A und B verbinde, was auf B_1R den Schnitt P und auf A_1R den Schnitt Q giebt. PQ giebt dann den gesuchten Punkt C.

21) **Satz von Désargues.** Ein Kegelschnitt und ein beliebiges Sehnenviereck desselben werden durch jede Gerade in Involution geschnitten.

Beweis. $PQRS$ sei das Sehnenviereck, KL die schneidende Gerade, dann sind die Büschel $P(AQSA_1)$ und $R(AQSA_1)$ projektivisch (vergl. Seite 23), folglich sind die Doppelverhältnisse (ABC_1A_1) und (ACB_1A_1) einander gleich. Das letztere läßt sich aber nach Seite 28 auch als (A_1B_1CA) schreiben, folglich ist

Fig. 152.

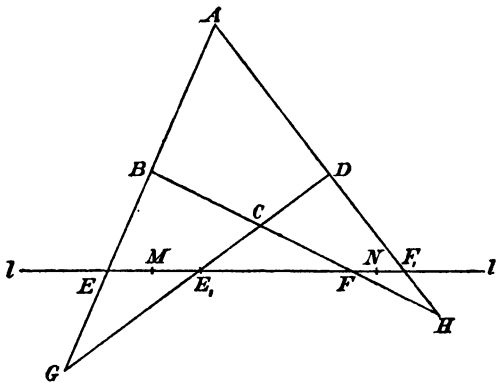


$$(ABC_1A_1) = (A_1B_1CA).$$

Da im zweiten Doppelverhältnis die zugeordneten Punkte zu denen des ersten stehen, so stehen die sechs Punkte in Involution.

22) **Folgerung.** Durch vier Punkte $PQRS$ lassen sich unendlich viele Kegelschnitte legen; jeder von diesen wird nebst den Seiten des Vierecks $PQRS$ durch jede Gerade KL in Involution geschnitten, und die Gesamtheit der Punktpaare ist eine involutorische Punktreihe. Berührt einer der Kegelschnitte die Gerade, so kann dies nur in einem der Doppelpunkte (M oder N) geschehen. Ist also die Reihe eine hyperbolische, so sind zwei Kegelschnitte möglich, welche durch die Punkte P, Q, R, S gehen und die Gerade KL berühren.

Fig. 153.



Dadurch wird folgende Aufgabe lösbar:

23) **Aufgabe.** Einen Kegelschnitt zu konstruieren, der durch vier gegebene Punkte geht und eine beliebig gegebene Gerade berührt.

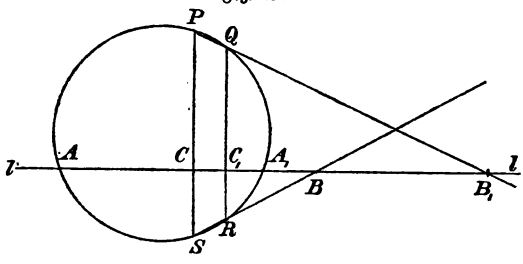
Auflösung. Sind A, B, C und D die gegebenen Punkte und l die gegebene Gerade, so vervollständige man das Viereck $ABCD$ durch G und H zum

vollständigen Viereck, wobei man als Schnittpunkte von l mit den Gegenseiten die Punktepaare E und E_1, F und F_1 erhält.

Man konstruiere nach Nr. 13 die Doppelpunkte M und N für die dadurch bestimmte Punktreihe. Dann sind zwei Kegelschnitte bestimmt, von denen der eine durch die fünf Punkte $ABCDM$ geht, der andere durch $ABCDN$. Beide berühren die Gerade l.

24) **Bemerkung.** In Figur 154 ist ein Viereck $PQRS$ dargestellt, außerdem ein durch die Eckpunkte gehender Kegelschnitt und eine schneidende Gerade l. Rückt man nun P an Q und R an S, so werden PQ und RS Tangenten, die Sehnen SP und RQ werden zur Berührungssehne, C und C_1 fallen zusammen, und B und B_1 liegen auf den Tangenten.

Fig. 154.

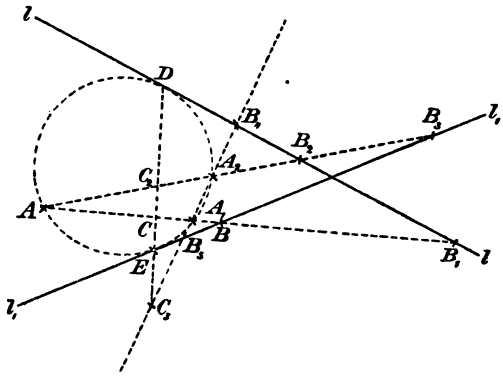


Jetzt ist auf der Geraden l eine involutorische Punktreihe bestimmt, für welche C der Doppelpunkt ist. Demnach gilt folgender

Satz: Werden ein Kegelschnitt und zwei seiner Tangenten nebst zugehöriger Berührungssehne durch eine beliebige Gerade geschnitten, so ist durch die Schnittpunkte eine involutorische Punktreihe bestimmt, für welche der auf der Berührungssehne liegende Schnittpunkt ein Doppelpunkt ist.

Dadurch wird folgende Aufgabe lösbar:

Fig. 155.



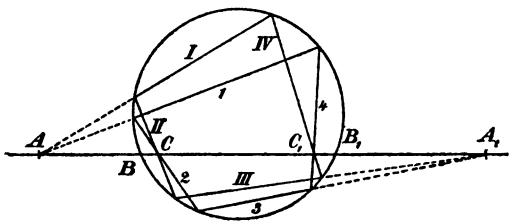
25) **Aufgabe.** Einen Kegelschnitt zu konstruieren, von dem drei Punkte und zwei Tangenten gegeben sind.

Auflösung. Sind l und l_1 die beiden gegebenen Tangenten, A, A_1 und A_2 die drei gegebenen Punkte, so giebt die Gerade AA_1 die Punktpaare A und A_1, B und B_1. Konstruiert man dazu den zwischen A und A_1 liegenden Doppelpunkt C, so ist dies ein Punkt der Berührungssehne. Dieselbe Konstruktion mache man mit der Geraden AA_2, was C_2 giebt (oder mit A_1A_2, was außerhalb B_4B_5 den Punkt C_3 giebt). Die Verbindungslinie CC_2 (oder CC_3) giebt die Berührungspunkte D und E der beiden Tangenten, so daß der Kegelschnitt nach Pascal fertig konstruiert werden kann. Zu beiden Kegelschnittsaufgaben können sofort die reciproken gelöst werden (4 Tangenten und 1 Punkt, oder 3 Tangenten und 2 Punkte).

Von den zahlreichen Folgerungen, die sich aus dem Satze von Désargues ableiten lassen, sei nur noch eine angegeben.

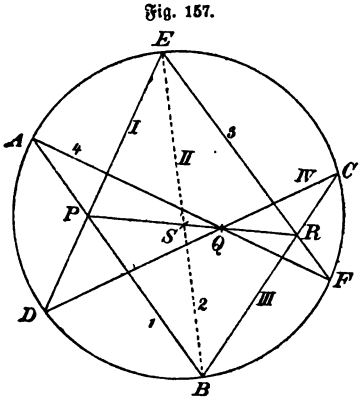
Satz: Sind einem Kegelschnitte zwei Vierecke einbeschrieben, und schneiden sich drei Paare entsprechender Seiten auf einer Geraden, so schneidet sich auch das vierte Paar auf dieser Geraden.

Fig. 156.



Beweis. I und 1, II und 2, III und 3 mögen sich in den Punkten A, C und A_1 der Geraden BB_1 schneiden. Für jedes der beiden Vierecke stehen A, A_1, B, B_1, C und der Schnittpunkt der vierten Seite mit der Geraden BB_1 in Involution. Da aber der sechste Punkt C_1 nur einmal vorhanden sein kann, muß der Schnittpunkt von IV und 4 ebenfalls auf die Gerade BB_1 fallen.

Fig. 157.



Daraus folgt ein weiterer Beweis des Pascalschen Satzes. Ist nämlich $ABCDEF$ ein Sehnensechseck eines Kegelschnitts, so ziehe man eine der Hauptdiagonalen, z. B. BE, so daß man im Kegelschnitte zwei Vierecke I II III IV und 1 2 3 4 hat, von deren Seiten sich I und 1 in P, III und IV

in R schneiden, während II und 2 zusammenfallen, so daß man den auf PR liegenden Schnitt S als den von II und 2 betrachten darf. Jetzt muß auch Q, der Schnitt von IV und 4, auf der Geraden PR liegen, womit der Satz bewiesen ist.

Man versuche den obigen Satz dahin zu verallgemeinern, daß man die Ecken jedes Vierecks auf einem beliebigen Kreise des durch B und B_1 gehenden Kreisbüschels liegen läßt, und suche dann den zum Pascalschen analogen Satz auszusprechen. Ebenso versuche man sämtliche reciproken Sätze auszusprechen und zu beweisen, wodurch z. B. ein neuer Beweis für den Satz des Brianchon gefunden wird.

II. Involutorische Strahlenbüschel.

26) Verbindet man die Punkte einer involutorischen Punktreihe mit einem beliebigen Punkte, so entsteht ein involutorisches Strahlenbüschel. Dasselbe ist ein elliptisches, ein hyperbolisches, oder ein parabolisches, je nachdem die Punktreihe einer der drei Gruppen angehört.

Aus Gründen der Erhaltung der Doppelverhältnisse bei der Projektion oder bei der Abbildung mittels reciproker Polaren kann man die Eigenschaften des Strahlenbüschels sofort aus denen der Punktreihe ableiten, obwohl auch eine selbständige Entwickelung möglich ist, auf die hier verzichtet werden soll.

Ein involutorisches Strahlenbüschel wird durch jede Gerade in einer involutorischen Punktreihe geschnitten. (Projektion.)

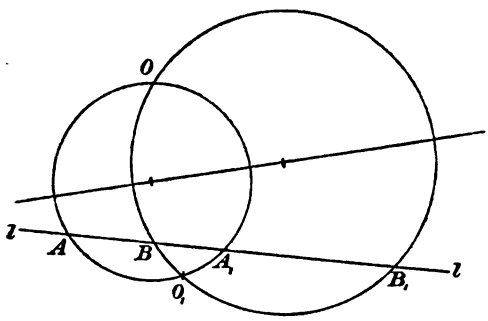
27) Das hyperbolische Strahlenbüschel hat zwei Doppelstrahlen. Je zwei zugeordnete Strahlen sind durch die Doppelstrahlen harmonisch getrennt.

Die Doppelstrahlen werden als Asymptoten bezeichnet. Zu dem hyperbolischen Strahlenbüschel gehört die Winkelhalbierende zwischen den Asymptoten und der auf ihr senkrechte Strahl. Auf jeder Geraden nämlich, die von den Asymptoten gleiche Stücke abschneidet, sind die Schnittpunkte, der Halbierungspunkt ihrer Verbindungslinie und der unendlich ferne Punkt harmonische Punkte. Jene beiden Strahlen sind im allgemeinen die einzigen des involutorischen Büschels, die auf einander senkrecht stehen. Sie spielen dieselbe Rolle, wie bei der involutorischen Punktreihe der Punkt O und der unendlich ferne Punkt.

28) Für das elliptische Strahlenbüschel sind die Asymptoten imaginär.

Ist durch A, A_1 und B, B_1 ein elliptisches Strahlenbüschel durch den Punkt O gegeben, und legt man durch OAA_1 und ebenso durch OBB_1 einen Kreis, so entsteht ein Schnittpunkt O_1. Das durch O und O_1 gehende Kreisbüschel giebt die paarweise Zuordnung aller Punkte und aller Strahlen durch O. Im allgemeinen schneidet die Gerade l die Centrale des Kreisbüschels, folglich liegt im allgemeinen ein Kreismittelpunkt auf der Geraden. Die Schnittpunkte des dadurch bestimmten Büschelkreises geben diejenigen zugeordneten Strahlen des elliptischen Büschels, die aufeinander senkrecht stehen. (Peripheriewinkel im Halbkreise.)

Fig. 158.



Fällt die Gerade l in die Centrale, so stehen sämtliche Strahlen des durch O gehenden Büschels auf einander senkrecht. Dieser Fall tritt also ein, sobald zwei rechtwinklige Strahlenpaare existieren. Man nennt ein solches rechtwinkliges Strahlenbüschel auch ein circulares, da es z. B. von den auf einander senkrechten Durchmessern eines Kreises gebildet wird. Durch Projektion folgt daraus der Satz:

29) **Satz.** Die konjugierten Durchmesser eines Kegelschnitts bilden ein involutorisches Strahlenbüschel.

Die beiden Hauptachsen geben die auf einander senkrechten Strahlen. Zieht man zur einen Asymptote einer Hyperbel eine parallele Sehne, so liegt ihr Halbierungspunkt in unendlicher Entfernung. Die Verbindungslinie des Hyperbelmittelpunktes mit diesem Halbierungspunkte fällt also mit der Asymptote zusammen, d. h. die Asymptote und ihr konjugierter Durchmesser fallen zusammen, folglich hat das Büschel der konjugierten Durchmesser bei der Hyperbel zwei Doppelstrahlen, die Asymptoten. Bei der Ellipse hingegen sind bei dem betreffenden Büschel Doppelstrahlen nicht vorhanden. Die Parabel bildet den Zwischenfall.

Hieraus erklären sich die Namen des hyperbolischen, elliptischen und parabolischen Strahlenbüschels und der entsprechenden Punktreihen, der Asymptotenstrahlen und Asymptotenpunkte und ebenso die Namen der hyperbolischen und elliptischen Kreisschaar.

30) [Den gleichen Doppelverhältnissen von drei involutorischen Punktpaaren entsprechen nach Seite 25 gleiche Doppelverhältnisse bei drei involutorischen Strahlenbüscheln. Sind nämlich die zugeordneten Strahlenpaare $a\alpha$, $b\beta$ und $c\gamma$, so gelten folgende Gleichungen:

1) $$\frac{\sin(ab)\sin(a\beta)}{\sin(\alpha b)\sin(\alpha\beta)} = \frac{\sin(ac)\sin(a\gamma)}{\sin(\alpha c)\sin(\alpha\gamma)}$$

2) $$\frac{\sin(bc)\sin(b\gamma)}{\sin(\beta c)\sin(\beta\gamma)} = \frac{\sin(ba)\sin(b\alpha)}{\sin(\beta a)\sin(\beta\alpha)}$$

3) $$\frac{\sin(ca)\sin(c\alpha)}{\sin(\gamma a)\sin(\gamma\alpha)} = \frac{\sin(cb)\sin(c\beta)}{\sin(\gamma b)\sin(\gamma\beta)}$$

4) $$\sin(a\beta)\sin(b\gamma)\sin(c\alpha) = \sin(a\gamma)\sin(b\alpha)\sin(c\beta)$$

5) $$\sin(a\beta)\sin(bc)\sin(\gamma a) = \sin(ac)\sin(b\alpha)\sin(\gamma\beta)$$

6) $$\sin(b\gamma)\sin(ca)\sin(\alpha\beta) = \sin(ba)\sin(c\beta)\sin(\alpha\gamma)$$

7) $$\sin(c\alpha)\sin(ab)\sin(\beta\gamma) = \sin(cb)\sin(\alpha\gamma)\sin(\beta\alpha)].$$

31) Noch ist der Begriff der Potenz für das Strahlenbüschel abzuleiten. Bei der Punktreihe geschah dies mit Hülfe des Mittelpunktes O und des unendlich fernen Punktes. Das Analogon dazu sind bei dem Büschel die beiden senkrecht aufeinander stehenden zugeordneten Strahlen, die man auch als Achsen des Systems bezeichnet.

Sind a und α die Achsen, b und β, c und γ zwei andere Strahlenpaare, so ist zu bedenken, daß

$\sphericalangle(a\alpha) = 90^0$, $\sphericalangle(\alpha b) = 90^0 - \sphericalangle(ab)$, $\sphericalangle(\alpha\beta) = 90^0 - \sphericalangle(a\beta)$, $\sphericalangle(\alpha c) = 90^0 - \sphericalangle(ac)$, $\sphericalangle(\alpha\gamma) = 90^0 - \sphericalangle(a\gamma)$ ist.

Demnach geht die Formel

$$\frac{\sin(ab)\sin(a\beta)}{\sin(\alpha b)\sin(\alpha\beta)} = \frac{\sin(ac)\sin(a\gamma)}{\sin(\alpha c)\sin(\alpha\gamma)}$$

über in

$$\frac{\sin(ab)\sin(a\beta)}{\cos(ab)\cos(a\beta)} = \frac{\sin(ac)\sin(a\gamma)}{\cos(ac)\cos(a\gamma)}$$

oder in

$$\tan(ab)\tan(a\beta) = \tan(ac)\tan(a\gamma).$$

Dieses konstant bleibende Produkt wird als Potenz des involutorischen Strahlenbüschels betrachtet.

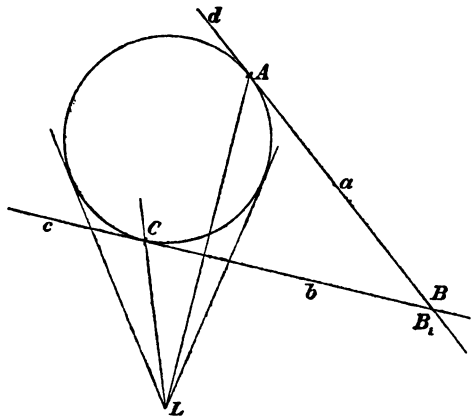
32) Man versuche, zu den Sätzen über involutorische Punktreihen die Sätze über involutorische Strahlenbüschel zu bilden und ebenso die reciproken Konstruktionsaufgaben zu lösen. So folgt z. B. aus Satz 19) der folgende:

Verbindet man einen beliebigen Punkt L mit den sechs Ecken eines vollständigen Vierseits, so entstehen drei Strahlenpaare in Involution.

Aus 21) folgt:

Verbindet man einen beliebigen Punkt L mit den Ecken eines Tangentenvierecks an einem Kegelschnitt, so bilden die Verbindungslinien und die von L aus gezogenen Tangenten drei Strahlenpaare in Involution.

Fig. 159.



Man kann das Tangentenviereck bei A und C mit Winkeln von 0^0 bezw. 180^0 versehen, dann fällt der Schnittpunkt B der Tangenten a und b mit B_1, dem Schnittpunkte der Tangenten c und d zusammen. Verbindet man jetzt L mit A, (BB_1) und C und zieht man noch die Tangenten, so hat man drei Strahlenpaare in Involution, von denen das eine ein Doppelstrahl ist.

33) **Aufgabe.** Einen Kegelschnitt zu konstruieren, der vier gegebene Tangenten berührt und außerdem durch einen gegebenen Punkt L geht.

Auflösung. Nach 23) ist die Auflösung folgende: Man verbinde L mit den sechs Eckpunkten des gegebenen Vierseits und betrachte die zu den Gegenecken gehörigen Strahlen als zugeordnete. Jetzt konstruiere man (z. B. mit Hülfe der Punktreihe auf einer beliebigen Transversale des Büschels) die Doppelstrahlen desselben. Jeder Doppelstrahl giebt eine Tangente durch L. (Warum?) Durch eine dieser Tangenten und die vier gegebenen ist nach Brianchon der Kegelschnitt bestimmt.

34) **Aufgabe.** Einen Kegelschnitt zu konstruieren, der drei gegebene Tangenten berührt und durch zwei gegebene Punkte geht.

Auflösung. Nach 25) ist die Auflösung folgende: Sind a, a_1, a_2 die gegebenen Tangenten, L und L_1 die gegebenen Punkte, so verbinde man den Schnitt von a und a_1 mit L und L_1, was zwei Strahlen b und b_1 giebt. Zu den Strahlenpaaren aa_1 und bb_1 suche man den Doppelstrahl c (z. B. mit Hülfe der Punktreihe auf einer Transversalen).

Jetzt verbinde man den Schnitt von a_1 und a_2 mit L und L_1, was Strahlen d und d_1 giebt. Zu den Paaren a_1, a_2 und d, d_1 suche man den Doppelstrahl c_1. Die Doppelstrahlen c und c_1 schneiden sich in einem Punkt C, der mit L und L_1 verbunden die Tangenten in diesen Punkten giebt. Jetzt kann der Kegelschnitt aus fünf Tangenten nach Brianchon auskonstruiert werden.

Damit ist gezeigt, wie man mit Hülfe des Involutionsbegriffes den Kegelschnitt aus fünf Elementen (Punkten oder Tangenten) allgemein konstruieren kann.

Zum tieferen Eindringen in die synthetische Geometrie sei das Studium der Steinerschen Vorlesungen, herausgegeben von Schröter (Leipzig bei B. G. Teubner) empfohlen. In analytischer Behandlung findet man dasselbe und reiches Übungsmaterial in der analytischen Geometrie der Kegelschnitte von Salmon-Fiedler (in demselben Verlage erschienen). Rein projektivisch wird der Gegenstand in dem Lehrbuche von Dr. J. Thomae (Halle, bei Nebert) behandelt.

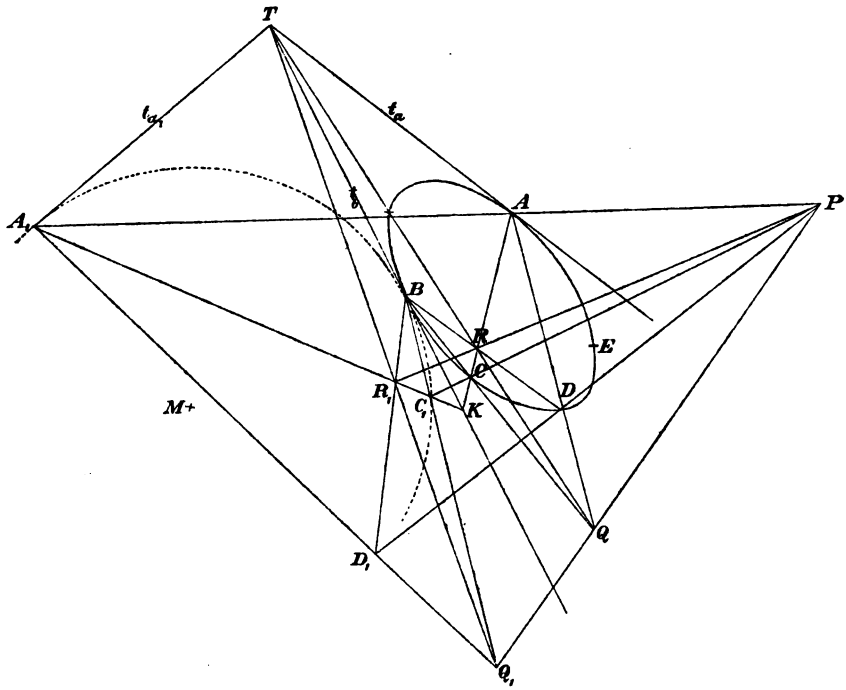
III. Nachtrag zum Pascalsatz.

Die Projektion eines Kreises giebt stets einen Kegelschnitt, von dem der Pascalsatz gilt. Es fragt sich aber, ob umgekehrt jede Kurve, von der der Pascalsatz gilt, sich in einen Kreis projizieren läßt und daher als Schnitt eines geraden oder schiefen Kreiskegels zu betrachten ist. Ist dies gezeigt, so gilt dies auch bezüglich des Brianchon-Satzes und von allen mit Hülfe projektivischer Punktreihen und Strahlenbüschel nach den früher angegebenen Methoden konstruierter Kurven.

Der Beweis kann folgendermaßen geführt werden, wobei jedoch der Name Kegelschnitt vermieden und Pascalkurve gesagt werden soll.

In Figur 160 sei $ABCDE$ eine durch fünf willkürlich gewählte Punkte definierte Pascalkurve, t_a und t_b seien die linear konstruierten Tangenten in A und B (vergl. Aufgabe 2, Seite 1). Da von der Kurve der Pascalsatz gilt, so gelten auch dessen Spezialisierungen für das Sehnenviereck und das Tangentenviereck (vgl. Figur 42 in Teil II), z. B. gehen die Diagonalen des Sehnen-

Fig. 160.



vierecks und des polaren Tangentenvierecks durch denselben Punkt, und die Diagonalen des Tangentenvierecks gehen zugleich durch den Schnittpunkt zweier Gegenseiten des Sehnenvierecks. Ist nun R der Schnittpunkt der Diagonalen von $ABCD$ und Q der Schnitt der Gegenseiten BC und AD, so müssen nach Obigem T, R und Q auf einer Geraden liegen, der Diagonale des zugehörigen Tangentenvierecks.

(Um E, welches vorher zur Konstruktion der Tangenten t_a und t_b nötig war, kümmern wir uns vorläufig nicht.)

Man zeichne jetzt einen beliebigen Kreis M, der die Tangente

t_b in B berührt, und lege von T aus an ihn die Tangente t_{a_1}, die in A_1 berühre. Ferner ziehe man AC bis zum Schnitte K mit t_b und verbinde K mit A_1, was auf dem Kreise den Schnittpunkt C_1 giebt. Die Geraden A_1A und C_1C geben einen Schnittpunkt P, der als eine Art von Projektionscentrum betrachtet werden soll.

Man ziehe BC_1 und PQ bis zum Schnitte Q_1, sodann Q_1A_1 und PD, was den Schnitt D_1 giebt. Dann ist das Viereck $A_1BC_1D_1$ eine Projektion des Vierecks $ABCD$, der Diagonalschnitt R_1 ist Projektion von R und die Gerade Q_1R_1T Projektion von QRT. [Um dies einzusehen, braucht man nur die Zeichnung räumlich aufzufassen. Man denke sich z. B. P als P' senkrecht über der Zeichnungsebene liegend und mit allen Punkten des Kreises und des neuen Vierecks verbunden, dann ist $ABCDE$ als orthographische Projektion eines Fünfecks $A_1B_1C_1D_1E_1$ in schräger Ebene aufzufassen, wobei z. B. A' senkrecht über A in der Geraden $P'A_1$ zu denken ist. Ebenso ist die Pascalkurve als Projektion einer in der schrägen Ebene liegenden Pascalkurve zu denken, wodurch die Allgemeinheit der Betrachtung nicht beschränkt wird.]

Es wird nun behauptet, daß D_1 auf dem Kreise liegt. Da nämlich t_{a_1} und t_b die Kreistangenten in A_1 und B sind, so muß nach dem oben (für den Kegelschnitt) benutzten Satze, wenn man auf A_1C_1 den Punkt R_1 annimmt und TR_1 und BC_1 bis Q_1 zieht, A_1Q_1 die vierte Seite und B_1R_1 die Diagonale eines dadurch bestimmten Kreisvierecks sein. Da aber D_1 der Schnitt von BR_1 und AQ_1 ist, so liegt D_1 auf dem Kreise M. Das Sehnenviereck $ABCD$ der Pascalkurve ist demnach in ein Kreisviereck $A_1BC_1D_1$ projiziert worden.

Macht man dieselbe Betrachtung für das Viereck $ABCE$, so erhält man ein Viereck $A_1BC_1E_1$, von dem die drei ersten Punkte bereits auf dem Kreise M liegen, während von E_1 in voriger Weise gezeigt werden kann, daß es ebenfalls auf dem Kreise liegt.

Denkt man sich also E auf der Pascalkurve wandernd, so wandert E_1 auf dem Kreise.

Wie man also auch den in B berührenden Kreis wähle, stets läßt er sich als Projektion der Pascalkurve betrachten.

Demnach kann jede Pascalkurve auf beliebig viele Arten auf einen Kreis projiziert werden, und man darf jede Pascalkurve als Schnitt jedes beliebigen geraden und schiefen Kegels betrachten.

(Vgl. Zeitschrift für math. Unterricht, 1894, Seite 575, Aufsatz von Dr. H. Thieme.)